הערה: לפי (ב) $S \subset L^p(\mu)$.

(רוצה כי לכל $f \in L^p(\mu)$ ונתון $\varepsilon > 0$ קיים $s \in S$

כך ש- $\|f - s\|_p < \varepsilon$

$|s| \le |f|$

ובנוסף: $f \ge 0$ אזי $s \ge 0$

הוכחה: סעיף (ב):

$S = \{ s \mid s \in L^p(\mu)$ פשוטה $\}$

תהי $f \in L^p(\mu)$. מקרה א': $f \ge 0$ (מדידה)

במקרה זה, לפי משפט הקירוב, קיימת סדרה (s_n)

של פשוטות, כך ש- $0 \le s_n \le s_{n+1} \le f$

ולכל $x \in X$:

$s_n(x) \xrightarrow{n \to \infty} f(x)$ נקודתית.

$|s_n|^p \le |f|^p \in L^1(\mu)$ כי $f \in L^p(\mu)$.

s_n מדידה, לכן $s_n \in L^p(\mu)$ (כי $|s_n|^p \in L^1(\mu)$)

ולכן $s_n \in S$.

ובנוסף $|f - s_n|^p \to 0$ נקודתית

$|f - s_n|^p$ מדידה

וכן, $|f - s_n|^p \le |f|^p \in L^1(\mu)$ לפי משפט ההתכנסות הנשלטת –

$$\int_X |f - s_n|^p \, d\mu \to \int_X 0 \, d\mu = 0$$

$\Rightarrow$ $\|f - s_n\|_p \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ כנדרש

$f^+ = \max\{0, f\}$
$f^- = \max\{0, -f\}$

מקרה ב' (המקרה הכללי):

$$f = f^+ - f^-$$

כאשר $0 \leq f^+, f^- \in L^p(\mu)$ וכן $f^+ \cdot f^- \equiv 0$

לפי המקרה הראשון, קיימות סדרות (s_n^-), (s_n^+) של פשוטות ב-S

כך ש- $0 \leq s_n^+ \leq f^+$ ו- $\|f^+ - s_n^+\|_p \to 0$

$0 \leq s_n^- \leq f^-$ ו- $\|f^- - s_n^-\|_p \to 0$

אזי: $s_n = s_n^+ - s_n^-$ וברור $s_n \in S$ (כי S מ"ו מעל $\mathbb{R}$)

$$s_n^+ s_n^- = 0 \Leftarrow 0 \leq s_n^+ s_n^- \leq f^+ f^- = 0$$

$$\Rightarrow |s_n|^2 = (s_n^+ - s_n^-)^2 = (s_n^+)^2 + (s_n^-)^2$$

$$\leq (f^+)^2 + (f^-)^2 = (f^+ - f^-)^2 = |f|^2$$

לכן $|s_n| \leq |f|$

$$0 \leq \|f - s_n\|_p = \|(f^+ - s_n^+) - (f^- - s_n^-)\|_p \leq$$

מינקובסקי $\leq \|f^+ - s_n^+\|_p + \|f^- - s_n^-\|_p \to 0$

לכן

$$\|f - s_n\|_p \to 0$$

<u>תרגיל</u>: יהי H מרחב הילברט ו- M תת מרחב לינארי סגור של H.
הוכיחו כי $M=(M^\perp)^\perp$.

<u>פתרון</u>: $M \subseteq (M^\perp)^\perp$ כי נניח $f\in M$, $g\in M^\perp$

$$\langle f,g\rangle = \overline{\langle g,f\rangle} = 0 .$$

לכן $f \in (M^\perp)^\perp$.

נוכיח $(M^\perp)^\perp \subseteq M$: M תת מרחב סגור של H - הילברט.

לכן: $H = M\oplus M^\perp$ (משפט הפירוק הניצב)

בפרט, נניח $f\in (M^\perp)^\perp$:

$$f = \underset{M}{\overset{\in}{g}} + \underset{M^\perp}{\overset{\in}{h}}$$

והראינו $M\subseteq (M^\perp)^\perp \Rightarrow g\in (M^\perp)^\perp$

$h = f-g \in (M^\perp)^\perp$ - עפ"י ת"ל כהפרש איברים בת"מ (כי זהו ת"מ לינארי)

<u>אבל</u> - $(M^\perp)^\perp \cap M^\perp = \{0\} \Rightarrow f-g=0 \Rightarrow f = g\in M$

$\Rightarrow (M^\perp)^\perp \subseteq M$

ובסה"כ $(M^\perp)^\perp = M$ כנדרש.

תרגיל: נגדיר: $F := \{ (a_n)_{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \mid \sup_n n|a_n| < \infty \}$

הוכיחו או הפריכו:

א) F תמ״ ליניארי של ℓ^2.

ב) הקבוצה $F \cap \ell^2$ סגורה ב-ℓ^2.

פתרון: א) נוכיח כי F תמ״ ליניארי של ℓ^2:

ברור כי $0 \in F$, ובנוסף:

$$(a_n),(b_n) \in F \Rightarrow \sup_n n|a_n| \ , \ \sup_n n|b_n| < \infty$$

$$\Rightarrow \sup_n n(|a_n|+|b_n|) < \infty$$

$$\Rightarrow \sup_n n|a_n+b_n| < \infty \Rightarrow (a_n+b_n) \in F$$

$$(a_n) \in F \ , \ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \sup_n n|a_n| < \infty$$

$$\Rightarrow \sup_n n|\alpha a_n| = \alpha \sup_n n|a_n| < \infty$$

$$\Rightarrow \alpha (a_n) \in F$$

הוכחנו כי F מרחב ליניארי.

נראה כי $F \subseteq \ell^2$: תהי $(a_n) \in F$ אזי:

$$M := \sup_n n|a_n| < \infty \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \cdot \ n|a_n| < M$$

$$\Rightarrow |a_n| \le \frac{M}{n}$$

כעת, הטור: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^2}{n^2}$ מתכנס, ולכן (לפי מבחן ההשוואה) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ מתכנס, לכן $(a_n) \in \ell^2$ כנדרש.

ב) נמצא דוגמא נגדית: לכל $k \in \mathbb{N}$ נגדיר:

$$a_k = (a_n^k) := \begin{cases} a_n^k = \frac{1}{n^{3/4}} & n \le k \\ a_n^k = 0 & n > k \end{cases}$$

אז: הסדרה a_k מתכנסת ב-ℓ^2 ל: $a=(a_n)=\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right)_{\mathbb{N}}$

שכן: $$\|a-a_k\|_2 = \sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

(כזנב של טור מספרי מתכנס)

בנוסף, לכל k: $$\sup_n n|a_n^k| = k^{1/4} < \infty$$

ולכן $a_k=(a_n^k)\in F \subseteq \ell^2$ $\Leftarrow$ $a_k\in F\cap\ell^2$.

אולם $\lim_{k\to\infty} a_k = a \notin F$ שכן:

$$\sup_n n|a_n| = \sup_n n^{1/4} = \infty$$

ולכן: $F\subset\ell^2$ לא סגורה ב-ℓ^2.

תרגול: נגדיר $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ ע"י:

$$F(y) := \int_0^\infty \frac{e^{-xy}-e^{-x}}{x}\,dx .$$

הוכיחו כי F גזירה וחשבו את הנגזרת F'.

פתרון:

נגדיר:
$$f(x,y) := \frac{e^{-xy}-e^{-x}}{x}$$

$$F(y) = \int_0^\infty f(x,y)\,dx$$

יהי $y_0\in(0,\infty)$, ו- $\{a_n\}_N$ סדרה עם השאיפה ל-0.

אזי:
$$\frac{F(y_0+a_n)-F(y_0)}{a_n} = \int_0^\infty \underbrace{\frac{f(x,y_0+a_n)-f(x,y_0)}{a_n}}_{=: f_n(x)}\,dx$$

אזי: $\forall x\in(0,\infty):\ \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \dfrac{\partial f(x,y_0)}{\partial y} = -e^{-xy_0}$

נניח שקיים $g\in L^1(0,\infty)$ כך ש- $\forall n:\ |f_n|\le g$

אזי, לפי משפט ההתכנסות הנשלטת

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(y_0+a_n)-F(y_0)}{a_n} = \lim_n \int_0^\infty f_n(x)\,dx = \int_0^\infty \lim_n f_n(x)\,dx =$$

$$= \int_0^\infty -e^{-xy_0}\,dx \overset{\text{רימן}}{=} \frac{e^{-xy_0}}{y_0}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{y_0}$$

מכיוון שהבחירה של $y_0\in(0,\infty)$, ושל $(a_n)_N \xrightarrow{n\to\infty} 0$ היא שרירותית

קבל ש F גזירה ב $(0,\infty)$ ומתקיים:

$$F'(y) = -\frac{1}{y} \Longrightarrow F(y) = \ln\frac{1}{y}+C$$

אבל $F(1) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-x}}{x}\,dx = 0 = -\ln(1)$

לכן $c=0$ $\quad F(y)=\ln(\frac{1}{y})-1$

נותר להוכיח קיום של מג'ורנטה g.

לכל n, f רציפה וגזירה לפי y, לכן לפי משפט הערך הממוצע

קיימים c_n: $0 \neq |c_n| \leq |a_n| \to 0$ כך ש:

$$f_n(x) = \frac{f(x,y_0+a_n)-f(x,y_0)}{a_n} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0+c_n) = e^{-x(y_0+c_n)}$$

$\Leftarrow$ (עבור n מספיק גדול) $\frac{y_0}{2} < y_0+c_n$

$\Leftarrow$ $|f_n(x)| = e^{-x(y_0+c_n)} = (e^{-x})^{y_0+c_n} < e^{-\frac{xy_0}{2}}$

$0<e^{-x}<1$

לכן $g(x) := e^{-\frac{xy_0}{2}} \in L^1(0,\infty)$ מהווה מג'ורנטה, כנדרש.

קל לבדוק.

22

תרגיל: תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ מדידה. הראו שכמעט לכל $x\in A$ מתקיים:

$$\lim_{y\to 0}\frac{d(x+y,A)}{|y|}=0$$

כאשר: $d(a,B):=\inf\{|a-b| \mid b\in B\}$, $a\in\mathbb{R}$, $B\subseteq\mathbb{R}$

הוכחה: מספיק להראות לכל נק' צפיפות (שומר, נק' השקיות את משפט הצפיפות).

יהי $\varepsilon>0$, נראה שקיימת $\delta>0$ כך שאם $|y|<\delta$ מתקיים:

$$\frac{d(x+y,A)}{|y|}<\varepsilon .$$

תהי $x\in A$ נק' צפיפות:

$$\frac{m(A\cap[x-\varepsilon,x+\varepsilon])}{2\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}1$$

לכן, עבור $\alpha:=1-\frac{\varepsilon}{2}$ קיימת $\delta>0$ כך שאם $|y|<\delta$

$$\frac{m(A\cap B(x,|y|))}{2|y|}>\alpha .$$

נניח בשלילה ש- $\frac{d(x+y,A)}{|y|}\geq\varepsilon$ $(*)$, ונניח בה"כ $0<y$,

אז נקבל: $A\cap(x+y-\varepsilon y,\, x+y]=\phi$

אחרת, יש נק' ב- A שהמרחק בינה ובין $x+y$ קטן מ- $\varepsilon|y|$ בסתירה ל- $(*)$. לכן:

$$\alpha=1-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{m(A\cap[x-y,x+y])}{2y}\leq$$

כיון שהמידה מונוטונית ו- $A\cap B(x,y)\subseteq B(x,y+\varepsilon y)$,

$$\leq\frac{m([x-y,x+y-\varepsilon y])}{2y}=\frac{2y-\varepsilon y}{2y}=1-\frac{\varepsilon}{2}.\Rightarrow$$ סתירה! קשוט

והעיקר: $A\cap(x-y-\varepsilon y,x+y]=\phi$ ולכן: $A\cap[x-y,x+y+\varepsilon y)=A\cap B(x,y+\varepsilon y)$

לכן $\frac{d(x+y,A)}{|y|}<\varepsilon$. מכיון ש- ε נבחר שרירותית הוכחנו את הדרוש.