בס"ד

מבחן במתמטיקה בדידה תשע"א סמסטר קיץ מועד ב

מרצים: ד"ר שי סרוסי וד"ר אפי כהן.

משך המבחן: שלש שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט וראש פתוח.

הוראות הפעלה:

יש לענות **בפירוט** על 5 שאלות **בדיוק**, **כל תשובה מופיעה במקומה בשאלון**. המחברות משמשות לטיוטה בלבד, **ולא יבדקו**.

הקיפו בטבלה הבאה את מספרי השאלות אותן בחרתם.

אחרת, יבדקו 5 הראשונות.

שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	
6	

ציון:

בהצלחה

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 1

תהיינה A,B,C קבוצות כך ש $|C|\geq 2$. תהי $f:A\to B$.
נגדיר $\varphi:C^B\to C^A$ ע"י $\varphi(g)=g\circ f$.

א. (10) הוכיחו כי φ חד חד ערכית אם ורק אם f על.

ב. (10) הוכיחו כי φ על אם ורק אם f חד חד ערכית.

פתרון

א. $\Rightarrow$ נניח ש- f על. יהיו $g_1,g_2\in C^B$ כך ש- $g_1\neq g_2$. לכן קיים $b\in B$ כך ש- $g_1(b)\neq g_2(b)$. יהי $a\in A$ כך ש- $f(a)=b$. מתקיים
$(g_1\circ f)(a)=g_1(f(a))=g_1(b)\neq g_2(b)=g_2(f(a))=(g_2\circ f)(a)$ לכן
$\varphi(g_1)=g_1\circ f\neq g_2\circ f=\varphi(g_2)$.
$\Leftarrow$ נניח ש- f איננה על. לכן קיים $b_0\in B$ כך שלכל $a\in A$ מתקיים $f(a)\neq b_0$. יהיו $c_1,c_2\in C$, $c_1\neq c_2$ נגדיר $g_1,g_2\in C^B$ ע"י $g_1(b)=c_1$ לכל $b\in B$ ו- $g_2(b)=\begin{cases}c_1 & b\neq b_0\\ c_2 & b=b_0\end{cases}$ לכל $b\in B$. מובן ש- $g_1\neq g_2$. כעת, לכל $a\in A$ מתקיים $(g_1\circ f)(a)=g_1(f(a))=c_1$ וכן $(g_2\circ f)(a)=g_2(f(a))=c_1$ ולכן $\varphi(g_1)=\varphi(g_2)$. כלומר φ איננה חד חד ערכית.

ב. $\Leftarrow$ יהיו $a_1,a_2\in A$ כך ש- $a_1\neq a_2$. יהיו $c_1,c_2\in C$, $c_1\neq c_2$. קיימת $h\in C^A$ כך ש- $h(a_1)\neq h(a_2)$. (למשל נתבונן ב- $h\in C^A$ המוגדרת ע"י $h(a)=\begin{cases}c_1 & a=a_1\\ c_2 & a=a_2\\ c_1 & a\neq a_1,a_2\end{cases}$ לכל $a\in A$.) φ על ולכן קיימת $g\in C^B$ כך ש- $\varphi(g)=g\circ f=h$. מאחר ו- $h(a_1)\neq h(a_2)$ מתקיים $f(a_1)\neq f(a_2)$.
$\Rightarrow$ תהי $h\in C^A$. יהי $c\in C$. נגדיר $g\in C^B$ ע"י
$g(b)=\begin{cases}h(a) & if\ \ b=f(a)\ \ for\ some\ a\in A\\ c & if\ \ b\notin f[A]\end{cases}$. g מוגדרת היטב כי f חח"ע. כעת, יהי $a\in A$. מתקיים
$\varphi(g)(a)=(g\circ f)(a)=g(f(a))=h(a)$ כלומר $\varphi(g)=h$ ו- φ על.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 2

1. (9) תהי X קבוצה לא ריקה ותהי $f:X\to Y$ פונקציה, הוכיחו כי f היא על Y אם ורק אם קיימת פונקציה $h:Y\to X$ כך ש $f\circ h=id_Y$. (id_Y - פונקצית הזהות)

2. הוכח או הפרך:

א. (4) תהיינה A ו-B קבוצות. אזי
$$A\times B=B\times A \Leftrightarrow (A=\Phi)\vee(B=\Phi)\vee(A=B)$$

ב. (4) תהיינה A,B,C,D קבוצות. אזי
$(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$.

ג. (3) תהי A קבוצה. אזי $A\cap P(A)=\phi$.

הערה: אין קשר בין הסעיפים.

פתרון

1. משפט שהוכח בהרצאה.
2. א. הוכחה. $\Leftarrow$ אם $A=\Phi$ או $B=\Phi$ אז $A\times B=B\times A=\Phi$. אם $A=B$ טריוויאלי ש- $A\times B=B\times A$.
$\Rightarrow$ נניח כי $A\times B=B\times A$. נראה כי אם $A\neq\Phi$ וגם $B\neq\Phi$ אז בהכרח $A=B$. יהי b איבר כלשהו ב – B (קיים איבר כזה, שכן B אינה ריקה). לכל איבר $a\in A$ מתקיים:
$a\in A\Rightarrow\langle a,b\rangle\in A\times B\Rightarrow\langle a,b\rangle\in B\times A\Rightarrow a\in B$. לכן $A\subseteq B$.
באופן דומה $B\subseteq A$ ולפיכך $A=B$.
ב. דוגמא נגדית: $A=\{1\}$ $B=\{2\}$ $C=\{3\}$ $D=\{4\}$.
$(A\cup B)\times(C\cup D)=\{(1,3),(2,3),(1,4),(2,4)\}$ אך
$(A\times C)\cup(B\times D)=\{(1,3),(2,4)\}$.
ג. דוגמא נגדית. $A=\{\phi\},P(A)=\{\phi,\{\phi\}\}$ ואז $A\cap P(A)=\{\phi\}\neq\phi$.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 3

יהיו V קבוצה, $X=\{(A,R,B): A,B\subseteq V, R\subseteq A\times B\}$, נגדיר יחס $\leq$ מעל X ע"י

$(A_1,R_1,B_1)\leq(A_2,R_2,B_2)\Leftrightarrow R_1\subseteq R_2$.

א. (4) הוכיחו כי $\leq$ יחס טרנזיטיבי ורפלקסיבי מעל X .

ב. (4) נגדיר יחס $\equiv$ מעל X ע"י

$$(A_1,R_1,B_1)\equiv(A_2,R_2,B_2)\Leftrightarrow(A_1,R_1,B_1)\leq(A_2,R_2,B_2)\wedge(A_2,R_2,B_2)\leq(A_1,R_1,B_1)$$

הוכיחו כי $\equiv$ יחס שקילות מעל X .

ג. (5) נגדיר $f: X\times X\to X$ ע"י $f((A,R,B),(C,S,D))=(C,R\circ S,B)$.

הוכיחו כי אם $(A_1,R_1,B_1)\leq(A_2,R_2,B_2)$ וגם $(C_1,S_1,D_1)\leq(C_2,S_2,D_2)$ אז $f((A_1,R_1,B_1),(C_1,S_1,D_1))\leq f((A_2,R_2,B_2),(C_2,S_2,D_2))$.

ד. (7) נסמן ב $[A,R,B]$ את מחלקת השקילות של (A,R,B) לגבי $\equiv$.

תהיי $\pi: X\to X/_{\equiv}$ ההעתקה הטבעית

(ז"א לכל $(A,R,B)\in X$ $\pi(A,R,B)=[A,R,B]$).

תהיי $\pi\times\pi: X\times X\to X/_{\equiv}\times X/_{\equiv}$

מוגדרת ע"י לכל $x,y\in X$ $(\pi\times\pi)(x,y)=(\pi(x),\pi(y))$.

הוכיחו כי קיימת פונקציה $g: X/_{\equiv}\times X/_{\equiv}\to X/_{\equiv}$ כך ש

$g\circ(\pi\times\pi)=\pi\circ f$.

פתרון

א. יהי $(A,R,B)\in X$ אזי $(A,R,B)\leq(A,R,B)$ כי $R\subseteq R$.

יהיו $(A_1,R_1,B_1),(A_2,R_2,B_2),(A_3,R_3,B_3)\in X$ כך ש-

$(A_1,R_1,B_1)\leq(A_2,R_2,B_2)$ ו- $(A_2,R_2,B_2)\leq(A_3,R_3,B_3)$ אזי $R_1\subseteq R_2$ וגם $R_2\subseteq R_3$ לכן $R_1\subseteq R_3$ ו- $(A_1,R_1,B_1)\leq(A_3,R_3,B_3)$.

ב. רפלקסיביות וטרנזיטיביות נובעות מסעיף א ומהעובדה שחיתוך של 2 יחסים רפלקסיביים (בהתאמה, טרנזיטיביים) הוא יחס רפלקסיבי (בהתאמה, טרנזיטיבי). 2 היחסים הנחתכים הם $\leq$ ו- $\leq^{-1}$. סימטריות נובעת מההגדרה (הסימטרית).

שימו לב ש- $(A_1,R_1,B_1)\equiv(A_2,R_2,B_2)$ אם"ם $R_1=R_2$ (ניתן גם להסביר כך את העובדה ש $\equiv$ יח"ש).

ג. לפי הנתון $(A_1,R_1,B_1)\le(A_2,R_2,B_2)$ ו- $(C_1,S_1,D_1)\le(C_2,S_2,D_2)$ כלומר $R_1\subseteq R_2$ ו- $S_1\subseteq S_2$ לכן $R_1\circ S_1\subseteq R_2\circ S_2$ (אכן, יהי $(c,b)\in R_1\circ S_1$ אזי קיים $x\in D_1\cap A_1$ כך ש- $(c,x)\in S_1$ וגם $(x,b)\in R_1$ לכן $(c,x)\in S_2$ וגם $(x,b)\in R_2$ ולכן $(c,b)\in R_2\circ S_2$) כלומר $f\left(\left(A_1,R_1,B_1\right),\left(C_1,S_1,D_1\right)\right)\le f\left(\left(A_2,R_2,B_2\right),\left(C_2,S_2,D_2\right)\right)$.

ד. לכל $[(A,R,B)],[(C,S,D)]\in X/_{\equiv}\times X/_{\equiv}$ נגדיר $g([(A,R,B)],[(C,S,D)]=[(C,R\circ S,B)]$. g מוגדרת היטב: נניח $([(A_1,R_1,B_1)],[(C_1,S_1,D_1)])=([(A_2,R_2,B_2)],[(C_2,S_2,D_2)])$ לכן $[(A_1,R_1,B_1)]=[(A_2,R_2,B_2)]$ וגם $[(C_1,S_1,D_1)]=[(C_2,S_2,D_2)]$ כלומר $R_1=R_2$ וגם $S_1=S_2$ לכן $R_1\circ S_1=R_2\circ S_2$ ו-

$$g([(A_1,R_1,B_1)],[(C_1,S_1,D_1)]=[(C_1,R_1\circ S_1,B_1)]=$$
$$=[(C_2,R_2\circ S_2,B_2)]=g([(A_2,R_2,B_2)],[(C_2,S_2,D_2)]$$

כעת, יהי $((A,R,B),(C,S,D))\in X\times X$ מתקיים $(\pi\circ f)\left((A,R,B),(C,S,D)\right)=\pi\left(C,R\circ S,B\right)=[(C,R\circ S,B)]$ וכן $(g\circ(\pi\times\pi))\left((A,R,B),(C,S,D)\right)=g([(A,R,B)],[(C,S,D)])=[(C,R\circ S,B)]$

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 4

תהיינה A, B קבוצות כך ש B אינסופית. נסמן $|A|=a, |B|=b$ ונניח ש $1<a\le b$.

א. (4) הוכיחו שקיימת תת קבוצה $C\subseteq B$ כך ש $|C|=|A|$.

ב. (4) מצאו את $|A\cup B|$, נמקו.

ג. (4) נגדיר $D:=\{f \mid f:B\to A\}$, הוכיחו $|D|=2^b$.

ד. (4) הוכיחו כי $\left|\bigcup_{x\in A}(B\times\{x\})\right|=b$.

ה. (4) מצאו את עוצמת הקבוצה הבאה $P(B\times A)\times B\times\mathbb{N}$.

פתרון

א. $|A|\le|B|$ לכן קיימת פונקציה חח"ע $f:A\to B$, לכן $f:A\to f[A]$ היא חח"ע ועל. כמובן ש $f[A]\subseteq B$ ו $|A|=|f[A]|$.

ב. נגדיר פונ' חח"ע $f:B\to A\cup B$ ע"י $f(b)=b$ לכן $b=|B|\le|A\cup B|$. מצד שני $|A\cup B|\le|B\times\{0\}\cup B\times\{1\}|=b+b=b$ (השתמשנו בעובדה ש $|A|\le|B|$ וכן שלכל עוצמה אינסופית b מתקיים $b+b=b$). לכן לפי ק.ש.ב. מתקיים $|A\cup B|=b$.

ג. $D=A^B$ לכן $|D|=a^b$ ולפי טענה שהוכחנו (כאשר $1<a\le b$ ו b עוצמה אינסופית) מתקיים $a^b=2^b$.

ד. $b=|B|\le|\bigcup_{x\in A}(B\times\{x\})|$ ע"י בחירת $x_0\in A$ (קיים כזה) והגדרת פונ' חח"ע $f:B\to\bigcup_{x\in A}(B\times\{x\})$ ע"י $f(b)=(b,x_0)$. מצד שני לפי משפט שהוכחנו $|\bigcup_{x\in A}(B\times\{x\})|\le|A|\cdot|B|=a\cdot b=b$ (השתמשנו בעובדה $|B\times\{x\}|=|B|\cdot 1=|B|$ ושלכל עוצמה אינסופית b, $a\cdot b=\max\{a,b\}$).
לכן לפי ק.ש.ב. $|\bigcup_{x\in A}(B\times\{x\})|=b$.

פתרון זריז יותר: $\bigcup_{x\in A}(B\times\{x\})=A\times B$ (למה?) ולכן $|\bigcup_{x\in A}(B\times\{x\})|=|A|\cdot|B|=a\cdot b=b$.

ה. $|P(B\times A)\times B\times N|=|P(B\times A)|\cdot|B|\cdot|N|=$

$$2^{ab}\cdot b\cdot\aleph_0=2^b\cdot b\cdot\aleph_0=\max\{2^b,b,\aleph_0\}=2^b$$

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 5

תהיי X קבוצה לא ריקה. F נקראת מסנן מעל X אם:

א. $F \subseteq P(X)$.

ב. $\phi \notin F$.

ג. $X \in F$.

ד. $E_1, E_2 \in F \Rightarrow E_1 \cap E_2 \in F$.

ה. $\{(E_1 \subseteq E_2 \subseteq X) \wedge (E_1 \in F)\} \Rightarrow E_2 \in F$.

הוכיחו כי קיים מעל X מסנן G כך שלכל מסנן F מעל X
$G \subseteq F \Rightarrow F \subseteq G$.

פתרון

נסמן $\Omega = \{F| \; X$ מסנן מעל $F\}$. Ω לא ריקה מכיוון ש $\{X\}$ מסנן מעל X.
נגדיר יחס סדר $F_1 \subseteq F_2 \Leftrightarrow F_1 \leq F_2$ (מההרצאה אנחנו יודעים שזהו יחס סדר חלקי). יהי $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ שרשרת ב Ω. נוכיח שלשרשרת יש חסם מלעיל. נתבונן ב $F = \bigcup_{\alpha \in I} F_\alpha$ ונוכיח ש F מסנן מעל X.

מכיוון שלכל $\alpha \in I$ $F_\alpha \in \Omega$ נקבל ש $X \in F_\alpha \subseteq P(X)$ ועל פי הגדרת האיחוד $X \in \bigcup_{\alpha \in I} F_\alpha \subseteq P(X)$.

יהיו $E_1, E_2 \in \bigcup_{\alpha \in I} F_\alpha$ על פי הגדרת האיחוד קיימים $\alpha, \beta \in I$ כך ש $E_1 \in F_\alpha, E_2 \in F_\beta$ מכיוון ש $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ שרשרת ב Ω ניתן להניח ב.ה.ג.כ ש $F_\beta \subseteq F_\alpha$ ומהגדרת ההכלה נקבל ש $E_1, E_2 \in F_\alpha$.
ומכיוון ש $F_\alpha \in \Omega$ נקבל ש $E_1 \cap E_2 \in F_\alpha$ ומהגדרת האיחוד $E_1 \cap E_2 \in \bigcup_{\alpha \in I} F_\alpha$.

נניח ש $E_1 \in \bigcup_{\alpha \in I} F_\alpha$ ז"א קיים $\alpha \in I$ כך ש $E_1 \in F_\alpha$ אם $E_1 \subseteq E_2$ אז מכיוון ש $F_\alpha \in \Omega$ אז $E_2 \in F_\alpha$ ומהגדרת האיחוד $E_2 \in \bigcup_{\alpha \in I} F_\alpha$ ולכן $\bigcup_{\alpha \in I} F_\alpha \in \Omega$ ז"א

קיבלנו חסם מלעיל לשרשרת ולכן יש ב Ω איבר מקסימאלי נסמנו ב G. אם קיים מסנן F כך $G \subseteq F$ אז מהגדרת יחס הסדר נקבל ש $G \leq F$ ומהמקסימאליות של G ב Ω נקבל ש $F \subseteq G$ כדרוש.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 6

1. מצא בכמה דרכים ניתן להושיב בשורה $2n$ אנשים, n נשים ו-n גברים, כך ש:
   א. (3) כל הגברים יושבים זה ליד זה.
   ב. (3) כל הגברים יושבים זה ליד זה, כל הנשים יושבות זו ליד זו ומלכה לא יושבת ליד גבר.
   ג. (3) גבר ואישה יושבים לסירוגין.
   ד. (3) דוד ומלכה לא יושבים זה ליד זו ($2n \ge 4$).
   ה. (3) בין דוד ומלכה יושבים 4 אנשים ($2n \ge 6$).
2. (5) הגברים והנשים מהסעיף הקודם התחתנו (כל גבר עם אישה אחת ולהפך). הוכח שמספר הדרכים להושיבם בשורה כך שאף זוג נשוי לא ישב יחד הוא $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}2^i\cdot(2n-i)!$.

פתרון

א. נקח את הגברים כאובייקט אחד וכל אישה כאובייקט. מספר התמורות של $n+1$ אובייקטים הוא $(n+1)!$ ואח"כ נערבב את הגברים (כל התמורות על קבוצת הגברים) וזאת ב-$n!$ דרכים ולכן לפי עקרון המכפלה נקבל $n!(n+1)!$.

ב. יש 2 אפשרויות: גברים בשמאל ונשים בימין ולהיפך.
אם נמקם את הגברים בשמאל וזאת ב-$n!$ דרכים אח"כ נבחר למלכה מקום מתוך $n-1$ המקומות המותרים לה וזאת ב-$n-1$ דרכים ולבסוף נערבב את $n-1$ הנשים שנותרו וזאת ב-$(n-1)!$ דרכים. נקבל אותו דבר אם נמקם את הגברים בימין. לכן נקבל $2\cdot n!\cdot(n-1)(n-1)!$.

ג. יש 2 אפשרויות: גבר, אישה,... משמאל לימין או אישה, גבר,... משמאל לימין. לכן נקבל $2n!n!$.

ד. מספר האפשרויות שדוד ומלכה יושבים זה ליד זו הוא $2\cdot(2n-1)!$ (נקח אותם כאובייקט אחד...) לכן התשובה היא $(2n)!-2\cdot(2n-1)!$.

ה. נבחר 4 אנשים מתוך $2n-2$ האנשים (שאינם דוד ומלכה) עם חשיבות לסדר וזאת ב-$p(2n-2,4)$ דרכים. נחשוב על השישה

כאובייקט אחד, נערבב את $2n-5$ האובייקטים ולא נשכח לערבב את דוד ומלכה. נקבל $(2n-5)!\cdot 2\cdot p(2n-2,4)$.

2. לפי עקרון ההכלה וההדחה. נגדיר U - קבוצת כל הסידורים. A_i - קבוצת הסידורים כך שהזוג הנשוי ה-i יושב ביחד.

נקבל $|A_i|=2\cdot(2n-1)!$, $|A_i\cap A_j|=2\cdot 2\cdot(2n-2)!$,...

לכן,

$$|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|=(2n)!-n\cdot 2\cdot(2n-1)!+\binom{n}{2}2^2\cdot(2n-2)!-\ldots+(-1)^n 2^n\cdot n!=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}2^i\cdot(2n-i)!$$