מערך תרגול 6

88 − 201 תשע"ח סמסטר ב'

1 משטחים רגולריים

תזכורת 1

א. פרמטריזציה של משטח היא $\boldsymbol{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ דיפרנציאבילית. נסמן $\boldsymbol{x}(u^1, u^2) = (x^1, x^2, x^3)$.

ב. אם הוקטורים $\boldsymbol{x}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^1}$ ו־ $\boldsymbol{x}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^2}$ בת"ל נאמר שהפרמטריזציה רגולרית. תנאי שקול הוא שמטריצת היעקוביאן $J_{\boldsymbol{x}} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\right)$ היא מדרגה מלאה, כלומר מדרגה 2.

תרגיל 1 תהי $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. הגרף שלה הוא המשטח המוגדר ע"י

$$\boldsymbol{x}(u^1, u^2) = (u^1, u^2, f(u^1, u^2))$$

הראו כי זו פרמטריזציה רגולרית.

פתרון 1 נחשב את $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$:

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^1} = (1, 0, f_x)^t$$

$$\boldsymbol{x}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^2} = (0, 1, f_y)^t$$

כלומר אכן הוקטורים בת"ל לכן הפרמטריזציה רגולרית.

תרגיל 2 מיצאו פרמטריזציה רגולרית למישור המוגדר בצורה סתומה ע"י $ax + by + cz = d$ כאשר $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

פתרון 2 נניח בה"כ $c \neq 0$ ואז $z = \frac{-ax-by-d}{c}$ לכן $\boldsymbol{x}(u^1, u^2) = (u^1, u^2, \frac{-au^1-bu^2-d}{c})$ פרמטריזציה של המישור הנתון. נבדוק האם היא רגולרית:

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^1} = (1, 0, -\frac{a}{c})^t$$

$$\boldsymbol{x}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^2} = (0, 1, -\frac{b}{c})^t$$

הוקטורים $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ בת"ל לכן זו אכן פרמטריזציה רגולרית של המישור הנתון.

תרגיל 3 מיצאו פרמטריזציה של גליל והראו כי היא רגולרית.

פתרון 3 פרמטריזציה של גליל סביב ציר z :

$$\boldsymbol{x}(u^1, u^2) = (a \cos u^1, a \sin u^1, u^2)$$

עבור $a > 0$. נראה שהיא רגולרית:

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^1} = (-a \sin u^1, a \cos u^1, 0)^t$$
$$\boldsymbol{x}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^2} = (0, 0, 1)^t$$

2 מקדמי המטריקה

תזכורת 2

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

באשר

$$g_{ij} = g_{ij}(u^1, u^2) = \langle \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j \rangle = \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^i}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^j} \right\rangle$$

תרגיל 4 מיצאו את (g_{ij}) עבור הגרף של $f(x, y) = xy$.

פתרון 4 פרמטריזציה של הגרף:

$$\boldsymbol{x}(u^1, u^2) = (u^1, u^2, u^1 u^2)$$

לכן נגזרות ראשונות הן

$$\boldsymbol{x}_1 = (1, 0, u^2)$$

$$\boldsymbol{x}_2 = (0, 1, u^1)$$

לכן

$$g_{11} = 1 + (u^2)^2$$
$$g_{12} = u^1 u^2$$
$$g_{22} = 1 + (u^1)^2$$

כלומר

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + (u^2)^2 & u^1 u^2 \\ u^1 u^2 & 1 + (u^1)^2 \end{pmatrix}$$

שימו לב: אכן בהתאם לנוסחה שהוכחתם בהרצאה בנוגע למקדמי g_{ij} של גרף של פונקציה.

3 משטחי סיבוב

תזכורת 3 תהי C עקומה במישור xz הנתונה ע"י הפרמטריזציה

$$.\phi \mapsto (r(\phi), 0, z(\phi))$$

משטח הסיבוב (סביב ציר z) הנוצר ע"י העקומה C נתון ע"י הפרמטריזציה

$$.\boldsymbol{x}(\theta, \phi) = (r(\phi)\cos\theta, r(\phi)\sin\theta, z(\phi))$$

תרגיל 5 בנו את הספירה מרדיוס a כמשטח סיבוב וחשבו את מקדמי המטריקה.

פתרון 5 נמצא פרמטריזציה של עיגול ברדיוס a סביב הראשית במישור xz כך שעבור $\phi = 0$ נקבל את הנקודה הצפונית של העיגול ועבור $\phi = \pi$ נקבל את הנקודה הדרומית, וכך שהתנועה היא עם כיוון השעון:

$$\alpha(\phi) = (a\sin\phi, 0, a\cos\phi) = (r(\phi), 0, z(\phi))$$

המשטח המתקבל לאחר סיבוב עקומה זו סביב ציר z הוא:

$$\boldsymbol{x}(\theta, \phi) = (a\sin\phi\cos\theta, a\sin\phi\sin\theta, a\cos\phi)$$

נמצא את הנגזרות החלקיות:

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta} = (-a\sin\phi\sin\theta, a\sin\phi\cos\theta, 0)$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \phi} = (a\cos\phi\cos\theta, a\cos\phi\sin\theta, -a\sin\phi)$$

כעת נוכל למצוא את מקדמי המטריקה:

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta} \right\rangle = a^2 \sin^2 \phi$$
$$g_{12} = \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \phi} \right\rangle = 0$$
$$g_{22} = \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \phi}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \phi} \right\rangle = a^2$$

לסיכום

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} a^2 \sin^2 \phi & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

תרגיל 6 סובבו את העיגול במישור xz הנתון ע"י $(x-2)^2 + z^2 = 1$ סביב ציר ה־ z לקבלת טורוס. מיצאו את (g_{ij}).

פתרון 6 פרמטריזציה

$$\alpha(\phi) = (2 + \cos\phi, 0, \sin\phi) = (r(\phi), 0, z(\phi))$$

משטח סיבוב

$$\boldsymbol{x}(\theta, \phi) = ((2 + \cos\phi)\cos\theta, (2 + \cos\phi)\sin\theta, \sin\phi)$$

נגזרות חלקיות

$$x_\theta = (-(2 + \cos\phi)\sin\theta, (2 + \cos\phi)\cos\theta, 0)$$
$$x_\phi = (-\cos\theta \sin\phi, -\sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$$

מכפלות פנימיות

$$g_{11} = \langle x_\theta, x_\theta \rangle = (2 + \cos\phi)^2$$
$$g_{12} = \langle x_\theta, x_\phi \rangle = 0$$
$$g_{22} = \langle x_\phi, x_\phi \rangle = 1$$

כלומר

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} (2 + \cos\phi)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

תרגיל 7 סובבו את האליפסה $x^2 + \frac{z^2}{9} = 1$ במישור xz סביב ציר z לקבלת אליפסואיד. חשבו את מקדמי המטריקה.

פתרון 7 פרמטריזציה של האליפסה

$$\alpha(\phi) = (\cos\phi, 0, 3\sin\phi) = (r(\phi), 0, z(\phi))$$

נקבל משטח סיבוב

$$x(\theta,\phi) = (\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\sin\theta, 3\sin\phi)$$

כלומר

$$x_\theta = (-\sin\theta\cos\phi, \cos\theta\cos\phi, 0)$$
$$x_\phi = (-\sin\phi\cos\theta, -\sin\phi\sin\theta, 3\cos\phi)$$

כלומר

$$g_{11} = \langle x_\theta, x_\theta\rangle = \cos^2\phi$$
$$g_{12} = \langle x_\theta, x_\phi\rangle = 0$$
$$g_{22} = \langle x_\phi, x_\phi\rangle = \sin^2\phi + 9\cos^2\phi = 1 + 8\cos^2\phi$$

לכן

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos^2\phi & 0 \\ 0 & 1+8\cos^2\phi \end{pmatrix}$$