1. **הוכחה:** תהי T חלוקה נורמלית של $[a,b]$, כלומר $\max \vartriangle x_k = \mu(T) \to 0$

לפי הגדרה של אטינטגרל מסוים נקבל

$$c\int_a^b f(x)dx = c\lim_{\mu(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\vartriangle x_k = \lim_{\mu(T)\to 0} c\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\vartriangle x_k = \lim_{\mu(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} cf(\alpha_k)\vartriangle x_k = \int_a^b cf(x)dx$$

המעבר הראשון (משמאל ימנה) נכון לפי הגדרה של אינטגרל מסוים (נתון שהפונקציה $f(x)$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$)

המעבר השני- לפי תכונת הגבול

המעבר האחרון – זוהי בדיוק הגדרה של אינטגרל מסוים.

ולכן cf אינטגרבילית ב-$[a,b]$ כדרוש.

2. הפונקציה מונוטונית עולה וחסומה ולכן אינטגרבילית.

3. **הוכחה:** $f(x)$ רציפה ב-$[-a,a]$ ולכן אינטגרבילית לפי רימן בקטע ולכן האינטגרל $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ אינו תלוי בבחירה של חלוקה נורמלית של הקטע $[-a,a]$ וגם לא בבחירת הנקודות α_k בכל תת קטע של החלוקה. לכן נבחר חלוקה נורמלית

$T_1: 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = a$ של הקטע $[0,a]$

ו-$\alpha_k \in [x_{k-1}, x_k]$ כשלהי וכן נבחר חלוקה $T_2: -a = -x_n < -x_{n-1} < -x_{n-2} < \ldots < -x_1 < 0$ של הקטע $[-a,0]$ ו- $-\alpha_k \in [-x_k, -x_{k-1}]$

החלוקה $T = T_1 \cup T_2$ היא חלוקה נורמלית של $[-a,a]$ ולכן לפי הגדרה של אינטגרל מסוים נקבל:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \lim_{\mu(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(f(\alpha_k)\vartriangle x_k + f(-\alpha_k)\vartriangle x_k\right) = \lim_{\mu(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(f(\alpha_k)\vartriangle x_k - f(\alpha_k)\vartriangle x_k\right) = 0$$

במעבר האחרון השתמשנו באי זוגיות של הפונקציה.

מש"ל

4. א. $\int_1^3 (x^2 - x - 2)dx$

פתרון: הפונקציה $f(x) = x^2 - x - 2$ רציפה בקטע $[1,3]$ ולכן אינטגרבילית בו ולכן ניתן לבחור כל חלוקה של הקטע הנ"ל לחישוב האינטגרל.

נבחר חלוקה שווה כך ש- $\vartriangle x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$. בכל תת קטע נבחר נקודת קצה ימני בתור α_k, כלומר $\alpha_k = 1 + \frac{2k}{n}$ ונקבל

$$\int_1^3 (x^2 - x - 2)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2 - \left(1+\frac{2k}{n}\right) - 2\right)\frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n} + \left(\frac{2k}{n}\right)^2 - 2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k + \frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 - \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{8}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4}{n}n\right) = \frac{4}{2} + \frac{8\cdot 2}{6} - 4 = \frac{2}{3}$$

ב. $\int_0^4 \sqrt{x}dx$

פתרון:

$\frac{4k^2}{n^2}, k=0,1...,n$ נקודות החלוקה

$\vartriangle x_k = \frac{4k^2}{n^2} - \frac{4(k-1)^2}{n^2}$ אורך תת קטע $[x_{k-1}, x_k]$

$\alpha_k = \frac{4k^2}{n^2}$ קצה ימני של תת קטע $[x_{k-1}, x_k]$ שנציב בפונקציה לחישוב של סכום רימן.

$$\int_0^4 \sqrt{x}dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{4k^2}{n^2}}\left(\frac{4k^2}{n^2} - \frac{4(k-1)^2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n}\left(\frac{8k}{n^2} - \frac{4}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{16k^2}{n^3} - \frac{8k}{n^3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{16}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 - \frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{16}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{8}{n^3}\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{16\cdot 2}{6} - 0 = \frac{16}{3}$$

ג. דומה לסעיף א:

$$\Delta x = \frac{5-2}{n} = \frac{3}{n}$$

$$f(x_k) = 8\left(2+\frac{3k}{n}\right) - \left(2+\frac{3k}{n}\right)^2 = -\frac{9k^2}{n^2} + \frac{12k}{n} + 12 \qquad x_k = 2 + k\cdot\frac{3}{n} = 2 + \frac{3k}{n}$$

$$f(x_k)\Delta x = \left(-\frac{9k^2}{n^2} + \frac{12k}{n} + 12\right)\left(\frac{3}{n}\right) = -\frac{27k^2}{n^3} + \frac{36k}{n^2} + \frac{36}{n}$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{27k^2}{n^3} + \frac{36k}{n^2} + \frac{36}{n}\right) = -\frac{27}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 + \frac{36}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k + \frac{36}{n}\sum_{k=1}^{n}1$$

$$= -\frac{27}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{36}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \frac{36}{n}\cdot n = -\frac{9}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) + 18\left(1+\frac{1}{n}\right) + 36$$

$$\int_2^5 \left(8x - x^2\right)dx = \lim_{n\to\infty}\left[-\frac{9}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) + 18\left(1+\frac{1}{n}\right) + 36\right] = -\frac{9}{2}(1)(2) + 18(1) + 36 = 45$$

ד.

נתון : תהי P – חלוקה כלשהי של קטע $[a,b]$ על ידי נקודות כלשהן $x_i\ (i=0,1,...,n)$.

בכל תת קטע $[x_i, x_{i+1}]$ $i=0,1,\cdots n-1$ נבחר כנקודות אינטגרציה ממוצע הנדסי של קצות הקטע, כלומר $^2 c_i=\sqrt{x_i x_{i+1}}$

(נציין כי לכל זוג נק' חלוקה מתקיים $(i=0,1,...,n-1)$ $0<x_i<c_i<x_{i+1}$)

לפי הגדרת הפונקציה $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ נקבל $^2 f(c_i)=\dfrac{1}{(c_i)^2}\underset{(1)}{\overset{\downarrow}{=}}\dfrac{1}{x_i\cdot x_{i+1}}$,

סכום רימן המתאים הנו :

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\Delta x_i}{x_i x_{i+1}}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{x_{i+1}-x_i}{x_i x_{i+1}}=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{x_i}-\frac{1}{x_{i+1}}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_1}\right)_{i=0}+\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)_{i=1}+\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3}\right)_{i=2}+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{x_{n-2}}-\frac{1}{x_{n-1}}\right)_{i=n-2}+\left(\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{1}{x_n}\right)_{i=n-1}+$$

$$=\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_n}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$$

ולכן : $\displaystyle\int_a^b\frac{dx}{x^2}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$