תרגיל בית 4 – טופולוגיה

**שאלה 1**

1. הוכיחו את הטענה הבאה:  סגורה .
2. מצאו את נקודות ההצטברות של תת הקבוצות הבאות של המרחב המטרי :
3. ,
4. .

**שאלה 2**

יהי  מ"מ ותהי  תת קבוצה ו-. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

1.  (הפרש קבוצות).
2. קיים  כך ש-.
3. לכל סדרה, אם  אזי  קבועה לבסוף.

**שאלה 3**

1. יהימ"מ שלם ותהיתת קבוצה סגורה של.הוכיחו ש- תת מרחב מטרי שלם.
2. יהימ"מ ו- תת מרחב מטרי שלם של . הראו ש- תת קבוצה סגורה של .
3. הוכיחו או הפריכו: אם מ"מ שלם, ו- היא פונקציה רציפה, אזי תת מרחב שלם של .

**שאלה 4**

נסמן ב-את אוסף נקודות ההצטברות של ; נסמן ב- את אוסף נקודות ההצטברות של  וכן הלאה.

יהי  מ"מ, תהי  סדרה שכל איבריה שונים המתכנסת ל-כאשר.

1. מצאו את .
2. האם  קומפקטי?
3. האם  קומפקטי? נמקו את תשובתכם אך ורק באמצעות הגדרת הקומפקטיות דרך **כיסוים פתוחים**!

**שאלה 5**

יהי  מ"מ ויהי  אוסף אינסופי בן מניה של נקודות מתוך , כך שלכל שתי נקודות שונות  מתקיים . הוכיחו:

1.  סגור וחסום ב-.
2. האם  תת מרחב קומפקטי (ביחס למטריקת תת המרחב)?

**שאלה 6**

בתרגיל זה תוכיחו כי כל מטריקה שקולה למטריקה חסומה.

יהי  מ"מ**.** נגדיר שתי מטריקותעל **: **.

****לכל**.**

1. הוכיחו כי אלה אכן מטריקות.   
   (במידה ועשיתם זאת באינפי' 3 – אין צורך שתעשו שוב. אם לא עשיתם – זה תרגיל טוב.)
2. הוכיחו כי המטריקות הן חסומות.

הערה: מטריקה  נקראת "חסומה" אם קיים  כך שלכל  מתקיים (שקול להגדרות שניתנו בתרגול האחרון).

1. הוכיחו כי ,  ו-  שקולות.

**שאלה 7**

יהי  מ"מ קומפקטי. תהי  סדרה בעלת גבול חלקי יחידלכל היותר. הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

הדרכה: ראשית הראו שלסדרה אכן קיים גבול חלקי . כעת הניחו בשלילה שהסדרה לא מתכנסת ל- ובנו תת סדרה  כך ש-. מכאן הגיעו לסתירה.

**בהצלחה!**