אינפי 1 – פרופ' אגרונובסקי

הרצאה I:

<u>מידע לבירורים ושאלות</u>: 035318252, agranovs@math.biu.ac.il.macs, חדר 202.
<u>מה נלמד בקורס</u>? פונקצית עם משתנה אחד, תורת הטורים, סדרות, ותורת הגזירות.
כל מה שנעשה במהלך הקורס יהיה מעל המספרים הממשיים. קודם כל נצרך להגדיר בצורה מתמטית פורמאלית את זה.

<u>**פרק 1**</u>: המספרים הממשיים
שדה אלגברי: נניח שקיימת קבוצה F, ועל קבוצה זו יש שתי פעולות. פעולה היא העתקה שע"י לכל שני איברים ניתן להתאים איבר שלישי.
את הפעולה הראשונה נסמן: $+: F \times F \to F$. לכל $\forall x,y \in F: (x,y) \to x+y$. נקרא לפעולה זו חיבור.
אקסיומות השדה הם: השדה חייב להיות קומוטטיבי: $x+y=y+x$, $x+(y+z)=(x+y)+z$
נגדיר פעולה שניה, $\cdot: F \times F \to F$, ע"י $\forall x,y \in F: (x,y) \to x \cdot y = xy$.ומאחר והשדה קומוטטיבי נקבל $xy=yx$ ונדרוש גם שיהיה אסוציאטיבי ז"א $(xy)z=x(yz)$. לפעולה זו נקרא כפל.
עכשיו צריכים לחבר בין שני הפעולות. דיסטריבוטיביות: $x(y+z)=xy+xz$. ולאחר זה נקרא לקבוצה $(F,+,\cdot)$ שדה (קומוטטיבי). נגדיר איבר נייטרלי. לחיבור: $\exists 0: \forall x: x+0=x$. לגבי כפל: $\exists 1: 1\cdot x = x$. איברים נגדיים והופכיים: $\forall x \in F\ \exists y := -x$. $x+y=0$. $\forall x \in F\ \exists y := x^{-1}$. $xy=1$. נוכיח כי 0 יחיד: נניח שקיימים שני אפסים שונים, 0_1 ו-0_2 ע"פ הגדרת האיבר הנייטרלי נקבל $0_2=0_1=0_1+0_2$. בסתירה לכך שהם שונים. לכן 0 יחיד. ההוכחה עבור היחידות של x^{-1}, $-x$, ו1 דומה מאוד.
עכשיו נעבור לדון במבנה אחר, סדר. נשכח ממבנה השדה, ונדבר על קבוצה כלשהי X. מה זה אומר שקיים סדר על X? יחס סדר שלם נקרא כך אם לכל איבר קיים סדר בינהם. $\forall x,y \in X: x \le y \ or\ y \le x$. האקסיומות מוכרות לנו מהקורס בדידה, והם:

1. $x \le x$
2. $y \le x \,\&\, x \le y \to y = x$
3. $x \le y \,\&\, y \le z \to x \le z$

כעת נחבר שדה וסדר. שדה סדור: $(F,\ge)$ שדה: שדה שמקיים:

1. $x \le y \to x+z \le y+z$
2. $x,y \ge 0 \to xy \ge 0$

ומבחינת טרמינולוגית: $x \ge 0$ ייקרא אי שלילי. אם x גם שונה מאפס, x יקרא חיובי.

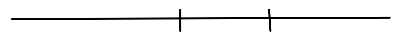
3. $x \le y, x \ne y \to x < y$.

תרגילים:
הוכח: $0 \ge x \leftrightarrow -x \le 0$. פתרון: $0 = x + (-x) \ge 0 + (-x) = -x$.
הוכח: $1>0$. פתרון: נניח בשלילה ש$1<0$. נקבל $-1>0$, ואז $(-1)(-1) > 0$, ונקבל $1>0$ בסתירה להנחה. משל.

<u>F שדה סדור. אקסיומה של רדיפות של *DEDEKIND*.</u>
הגדרה: $A \subset F, a \in F$ אם לכל x ששייך לA מתקיים $x \le a$. אזי $A \le a$. a חסם מלעיל.
אם לכל $x \in A$. מתקיים $a \le x$ אזי a יקרא חסם מלרע.

<u>אקסיומת דדקינד</u>:
נניח ש $A,B \subset F$ כך שלכל a,b ששייכים לA,B בהתאמה, מתקיים $a \le b$. אסי קיים c ששייך לF כך ש $A \le c \le B$.

<u>מודל</u> (קו ישר ממשי)



F
a *b* ז"א $a \le b$. ועכשיו קל יותר לדמיין ולהבין את האקסיומה של דדיקינד.
<u>משפט</u>: נניח ש F_1, F_2 שדות עם סדר שלם $(\le_1, \le_2)$. נניח שלשתי השדות הנ"ל מתקיימת האקסיומה של דדיקינד. אזי קיימת העתקה מסוימת $j: F_1 \to F_2$.כך ש: 1. $j(F_1)F_2$. ז"א על. וגם j חד חד ערכית. ז"א, ע"פ הגדרה, j איזומורפיזם של הקבוצות שהגדרנו. 2. שומר על פעולות של העתקה ליניארית. $j(x+y)=j(x)+j(y)$, וגם $j(xy)=j(x)j(y)$. 3. $x \le_1 y \to j(x) \le_2 j(y)$. נסמן: $F_1 \cong F_2$
לא נוכיח משפט זה, צריך לסמוך על המרצה.☺

דוגמא: $F=Q$ ונגדיר $A=\{r \in Q: r < \sqrt{2}\}$, $B=\{r \in Q: r > \sqrt{2}\}$. ברור ש$C$ לא קיים בשדה שלנו, מאחר והוא יהיה אי רציונאלי.נקרא לשדה שמקיים את כל התנאים האלה שדה הממשיים, ונסמנו $\mathbb{R}$. ונשתמש במודל הקו הישר הממשי.

<u>מספרים טבעיים</u>: ...,1,1+1,1+1+1. נסמן $\mathbb{N}$. קבוצה ב$\mathbb{R}$. מינימלית כך ש: 1.$1 \in \mathbb{N}$, 2. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N}$.
נגדיר את המספרים השלמים ע"י $\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$.

<u>עקרון של ארכימדס</u> :

הגדרה : $A \subset \mathbb{R}$. a איבר מקסימלי של A ז״א $a=maxA$. ז״א שאם a שייך לA אזי $x\le a$.

משפט : תהי E תת קבוצה של המפרים השלמים. ונניח שE חסומה מלעיל. אזי קיימת איבר מקסימלי בE.

הוכחה : נגדיר $B := \Gamma_+(R) = \{q \in \mathbb{R} : E \le q\}$ ברור ש $E \le \Gamma_+(R)$ פשוט לפי הגדרה של $\Gamma_+(R)$. לפי האקסיומה של דדיקינד קיים C כך ש$E \le c \le \Gamma_+(R)$. נסמן : $c' = c-1$. טענה : קיים n ששייך לE, כך ש$c' < n \le c$. נניח שלא קיים n כזה, ז״א ש$\forall m \in E: m \le c'$. וזה אומר ש$c' \in \Gamma_+(R)$ אבל $c' < c$ בסתירה. קיבלנו שקיים n שמקיים $c' < n \le c$. ואז מתקבל כי $n+1>c$, ולכל $n+i>c$. ולכן למסקנה, לכל $m \in E$ מתקיים $m \le n$.

<u>מסקנה</u> : $\mathbb{N}$ לא חסומה מלעיל.

<u>הוכחה</u> : נניח שקיים $c_0 \in \mathbb{R}$. כך שהוא חסם מלעיל. לפי העקרון של ארכימדס קיים $n=max\,\mathbb{N}$. אבל $n+1 \in \mathbb{N}$, וידוע כי $n+1 \le n$, ז״א ש $1 \le 0$. ואין זה נכון!

<u>מסקנה</u> : לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n \in \mathbb{N}$. כך ש$\frac{1}{n} < \varepsilon$. הוכחה : ניקח $c := \frac{1}{\varepsilon}$. C לא חסם מלעיל כלומר קיים $n \in \mathbb{N}$, כך ש $n > \varepsilon^{-1}$ ואז $\frac{1}{n} < \varepsilon$. משל.

נכפיל ל$\frac{1}{n} < \varepsilon$: εn^{-1}. מספרים רציונאליים : הגדרה : $r = mn^{-1}$. כאשר m,n מספרים שלמים. משפט, לכל a,b ממשיים קיים r רציונאלי כך ש r בינהם.