תרגיל 7

1. נסמן $X=[0,1)\cup\left\{2+\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\cup\{2\}$. מצאו את המסלולים של פעולת $Homeo(X)$ על X.
פתרון:
אנחנו טוענים שהמסלולים הם:
   (א) $\{2\}$
   (ב) $\left\{2+\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$
   (ג) $(0,1)$
   (ד) $\{0\}$

קל לראות שכל אחד מהמסלולים האלה באמת טרנזיטיבים (כלומר ישנה העתקה רציפה שמחברת כל שתי נקודות בתוכן. מנגד, נראה שכל אחד מהם שונה מהשני. ראשית, התמונה של נקודה מבודדת תחת הומיאומורפיזם היא בהכרח מבודדת ולכן $\left\{2+\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ חייבת להישלח לעצמה. בנוסף, לכל סביבה של 2 יש נקודה מבודדת ששונה מ־2 (לתכונה הזו קוראים $locally\ scattered$). קל לראו שזו הנקודה היחידה שמקיימת את זה ולכן היא חייבת להישלח לעצמה (כי זו תכונה שנשמרת בהומיאומורפיזם). לבסוף, נשים לב שלכל נקודה $x\in(0,1)$ מתקיים שבכל סביבה שלה, כל נקודה היא מחלקת. מנגד, לכל סביבה של 0 יש נקודה שאינה מחלקת. זו גם תכונה שנשמרת בהומיאומורפיזם ולכן הן לא יכולות להישלח אחת לשניה.

2. יהיו $(X,\tau),(Y,\sigma)$ מרחבים טופולוגיים, תהי $f:X\to Y$ ו־$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$. נניח גם ש־$A\subseteq X$ ו־$x\in X$. לבסוף, נניח ש־γ_τ בסיס ל־τ ו־γ_σ פרה־בסיס ל־σ. הוכיחו שאת התכונות הבאות מספיק לבדוק על γ_τ ו־γ_σ:
   (א) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת ל־x. כלומר: לכל $U\in\gamma_\tau$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq n_0$ מתקיים $x_n\in U$.
   (ב) f פונקציה רציפה: כלומר לכל $x\in X$ ולכל $f(x)\in U\in\gamma_\sigma$ קיימת $x\in V\in\gamma_\tau$ כך ש־$f(V)\subseteq U$.
   (ג) A צפופה: כלומר לכל $x\in X$ ולכל $x\in U\in\gamma_\tau$ קיים $a\in A$ כך ש־$a\in U$.
      i. X ספרבילית היא מסקנה ישירה
   (ד) X היא T_2. כלומר לכל $x\neq y\in X$ קיימות $U,V\in\gamma_\tau$ כך ש־$x\in U$,$y\in V$ וגם $U\cap V=\emptyset$.
   פתרון:

נעשה רק את סעיף ב' כי הוא הכי מסובך. נניח שלכל $x \in X$ ולכל $f(x) \in U \in \gamma_\sigma$ קיימת $x \in V \in \gamma_\tau$ כך ש־$f(V) \subseteq U$. תהי $f(x) \in U \in \sigma$. מכיוון ש־γ_σ פרה־בסיס, קיימים $U_1, \ldots, U_n \in \gamma_\sigma$ כך ש־

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i \subseteq U$$

לפי הנתון, קיימות $x \in V_i \in \gamma_\tau$ לכל $1 \leq i \leq n$ כך ש־$f(V_i) \subseteq U_i$. נגדיר $x \in V := \bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \tau$ ונשים לב ש־

$$f(V) := f\Big(\bigcap_{i=1}^{n} V_i\Big) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} f(V_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} U_i \subseteq U$$

זה נכון לכל $f(x) \in U \in \sigma$ לפי הגדרה, f רציפה.

3. יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $A \subseteq X$ תת קבוצה צפופה. הוכיחו ש־$\gamma := \left\{B\Big(a, \frac{1}{n}\Big)\right\}_{a \in A, n \in \mathbb{N}}$ היא בסיס לטופולוגיה של X.

<u>פתרון:</u>

לפי הערה מההרצאה, מספיק להוכיח שלכל $x \in X$ ולכל סביבה $x \in U \in \tau$ קיימת $V \in \gamma$ כך ש־$x \in V \subseteq U$. יהי $x \in X$ וסביבה $x \in U \in \tau$. לפי הגדרה, קיים $r > 0$ כך ש־$B(x,r) \subseteq U$. מכיוון ש־A צפופה, קיים $a \in A$ כך ש־$d(x,a) < \frac{1}{2}r$. נמצא $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$\frac{1}{n} < \frac{1}{2}r$ (זה אפשרי בגלל הארכימדיות של $\mathbb{R}$). אנחנו טוענים ש־

$$B\Big(a, \frac{1}{n}\Big) \subseteq B(x,r) \subseteq U$$

וגם $B\Big(a, \frac{1}{n}\Big) \in \gamma$ ולכן סיימנו. ובאמת, אם $y \in B\Big(a, \frac{1}{n}\Big)$ אז לפי אי שיוויון המשולש

$$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) < \frac{1}{2}r + \frac{1}{n} < \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r = r$$

לפי הגדרה $y \in B(x,r)$ כרצוי.

4. מתי (X, τ_{cof}) היא B_2? מתי היא B_1?

<u>פתרון:</u>

אנחנו נטען ש־(X, τ_{cof}) היא B_2 או B_1 רק אם X בת מניה. אכן, אם X היא בת מניה אז קל לראות ש־τ_{cof} בת מניה (תרגיל חמוד בתורת הקבוצות) ולכן (X, τ_{cof}) מקיימת את B_2 ובפרט את B_1. מנגד, נניח ש־$\beta \subseteq \tau_{cof}$ בסיס מקומי בן מניה ב־$x_0 \in X$. לפי הגדרה, לכל $U \in \tau_{cof}$ מתקיים ש־U^c קבוצה סופית. נסמן

$$U^c = \left\{x_1^{(U)}, \ldots, x_{n_U}^{(U)}\right\}$$

נגדיר פונקציה $\varphi : \beta \times \mathbb{N}^{>0} \to X$

$$\varphi(U,n) := \begin{cases} x_n^{(U)} & n \leq n_U \\ x_0 & n > n_U \end{cases}$$

אנחנו טוענים שהפונקציה הזו היא על. יהי $x \in X$ $x_0 \neq$. נשים לב ש־$x_0 \in X \backslash \{x\} \in \tau_{cof}$ היא סביבה ולפי הגדרת בסיס קיימת $U \in \beta$ כך ש־$U \subseteq X \setminus \{x\}$. בפרט, $x = x_n^{(U)}$ עבור $n \in \mathbb{N}^{>1}$ ולכן $x = \varphi(U, n)$. לפי משפט המכפלה של עוצמות אנחנו מסיקים ש־

$$|X| \leq |\beta \times \mathbb{N}| \leq \max\{|\beta|, \aleph_0\}$$

ולכן אם β בת מניה גם X. הראו כאן שאם (X, τ_{cof}) מקיים את B_1 אז הוא בן מניה. קל וחומר שהמצב דומה עם B_2.

5. יהי (X, τ) מרחב B_2. הוכיחו שלכל כיסוי פתוח $\{O_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$ (כלומר כזה שמקיים $\bigcup_{i \in I} O_i = X$) יש תת כיסוי בן מניה.
הערה: למרחב שמקיים את התנאי הזה קוראים מרחב לינדלוף (Lindelöf).
פתרון:

יהי $\{O_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$ כיסוי פתוח של X ויהי γ בסיס בן מניה של X. מכיוון ש־$\{O_i\}_{i \in I}$ כיסוי של X, לכל $x \in X$ קיים $i_x \in I$ כך ש־$x \in O_{i_x}$. לפי הגדרת בסיס, קיימים $U_x \in \gamma$ כך ש־$x \in U_x \subseteq O_{i_x}$. מכיוון ש־γ בן מניה אנחנו יכולים ליצור מספור

$$\{U^{(n)}\} = \{U_x\}_{x \in X}$$

(שימו לב שכאן $U^{(n)}$ הוא סתם מספור ולא הנגזרת ה־n־ית). לכל $n \in \mathbb{N}$ נבחר $x(n) \in X$ כך ש־$U^{(n)} = U_{x(n)}$. לבסוף, נסתכל על

$$J := \{i_{x(n)} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq I$$

אנחנו טוענים ש־$\{O_j\}_{j \in J}$ תת כיסוי בן מניה. נראה שזה באמת המצב, כלומר ש־$\bigcup_{j \in J} O_j = X$. לכל $x \in X$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$U^{(n)} = U_x$ ולכן

$$x \in U_x = U^{(n)} = U_{x(n)} \subseteq O_{i_{x(n)}} \subseteq \bigcup_{j \in J} O_j$$

כרצוי.

6. הוכיחו שתת מרחב של B_2 הוא B_2 (כלומר B_2 היא תורשתית)
פתרון:

יהי (X, τ) מרחב B_2 ויהי $\gamma \subseteq \tau$ בסיס בן מניה. נניח ש־$A \subseteq X$. אנחנו טוענים ש־

$$\widehat{\gamma} := \{A \cap O \mid O \in \gamma\}$$

הוא בסיס (בן מניה) ל־(A, τ_A). ראשית, ברור ש־$\widehat{\gamma} \subseteq \tau_A$. כעת, יהי $a \in A$ וסביבה $a \in U \in \tau_A$. אנחנו צריכים למצוא $a \in V \in \widehat{\gamma}$ כך ש־$V \subseteq U$. לפי הגדרת הטופולוגיה של תת המרחב, קיימת $U' \in \tau$ כך ש־$U = A \cap U'$. מכיוון ש־γ בסיס, קיימת $a \in V' \in \gamma$ כך ש־$V' \subseteq U'$. נגדיר $V := A \cap V' \in \widehat{\gamma}$. קל לראות ש־$V \subseteq U$ כרצוי. לכן, גם ל־(A, τ_A) יש בסיס בן מניה ולכן הוא B_2.

7. הראו ש־l_p הוא B_2 עבור $1 \leq p < \infty$.
פתרון:

נראה שהקבוצה A של סדרות רציונליות שמתאפסות לבסוף צפופה ב־l_p. זו קבוצה בת מניה ולכן l_p הוא ספרבילי. הוא בנוסף מטרי ולכן לפי משפט מההרצאה (ותוצאה

ישירה של תרגיל 3) הוא גם B_2. אכן, תהי $\overline{x} := \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l_p$ ויהי $\varepsilon > 0$. נמצא $A \ni \overline{y} := \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ כך ש־$d_p(\overline{x},\overline{y}) < \varepsilon$ מה שיוכיח ש־A צפופה. לפי הגדרה, קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש־

$$\Big(\sum_{n=n_0}^{\infty}|x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{2}\varepsilon$$

נגדיר כעת

$$y_n := \begin{cases} q_n & n < n_0 \\ 0 & n \geq n_0 \end{cases}$$

כאשר $|x_n - q_n| < \frac{1}{2^{n+2}}\varepsilon$ וגם $q_n \in \mathbb{Q}$. בבירור $\overline{y} \in A$. בנוסף,

$$d_p(\overline{x},\overline{y}) := \Big(\sum_{n=0}^{\infty}|x_n - y_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\sum_{n=0}^{n_0-1}|x_n - q_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{n=n_0}^{\infty}|x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\Big(\sum_{n=0}^{n_0}\frac{1}{2^{(n+2)p}}\varepsilon^p\ \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{n=n_0}^{\infty}|x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

כרצוי.

8. נסתכל על טופולוגיית סורגנפרי τ_s על $\mathbb{R}$ שמוגדרת כאיחוד של כל הקטעים מהצורה $[a,b)$, כלומר

$$\tau_s := \Big\{\bigcup_{i\in I}[a_i,b_i) \mid \forall i\in I : a_i,b_i\in\mathbb{R}\Big\}$$

(א) הראו שהיא האוסדורף
(ב) הראו שהטופולוגיה הזו ממידה אפס ולכן בלתי קשירה לחלוטין
(ג) הסיקו שהיא $T_{3\frac{1}{2}}$
(ד) הסיקו שכל פונקציה רציפה $f : \left(\mathbb{R},\tau_{|*|}\right) \to (\mathbb{R},\tau_S)$ מהטופולוגיה האוקלידית הינה קבועה.
(ה) מה היחס בינה ובין הטופולוגיה האוקלידית?
(ו) הראו שהיא ספרבילית
(ז) הראו שהיא אינה B_2
(ח) הראו שהיא כן B_1
(ט) הסיקו שהיא אינה מטריזבילית

<u>פתרון:</u>

i. קל לראות שהטופולוגיה הזו היא האוסדורף. יהיו $x \neq y \in \mathbb{R}$. בלי הגבלת הכלליות $x < y$ ולכן

$$U := [x,y), V := [y,y+1)$$

הן סביבות זרות כדרוש.

ii. נשים לב שקרנות מהסוג $(-\infty, b)$ גם נמצאות בטופולוגיה. זה קל לראות משום ש־

$$(-\infty, b) = \bigcup_{a<b} [a, b)$$

הטיעון לקרנות מהסוג השני דומה. כעת, נראה ש־$[a, b)$ סגוחה. ברור שהיא פתוחה ובנוסף המשלים

$$[a, b)^c = (-\infty, a) \cup [b, \infty)$$

גם פתוח כאיחוד של קבוצות פתוחות. קל לראות מהגדרת הטופולוגיה שלכל סביבה יש תת סביבה מהצורה $[a, b)$ ולכן זה מרחב טופולוגי ממימד אפס. לפי תרגיל מהתרגול הקודם, הוא בלתי קשיר לחלוטין.

iii. ראינו בהרצאה שמרחב טופולוגי האוסדורפי ממימד אפס הוא $T_{3\frac{1}{2}}$.

iv. ראינו גם שפונקציות רציפות משמרות קשירות. $\mathbb{R}$ קשיר ולכן התמונה שלו ב־$(\mathbb{R}, \tau_s)$ צריכה להיות קשירה גם כן. עם זאת, ראינו שהישר של סורגנפרי בלתי קשיר לחלוטין ולכן הקבוצות הקשירות הן הנקודונים בלבד. במילים אחרות התמונה של הפונקציה היא נקודון ולכן היא קבועה.

v. אפשר לראות ש־

$$(a, b) = \bigcup_{a<a'} [a', b)$$

ולכן כל קבוצה פתוחה בטופולוגיה האוקלידית פתוחה גם בישר של סורגנפרי. במילים אחרות $\tau_e \subseteq \tau_s$. מנגד, אנחנו יודעים ש־$[a, b)$ לא פתוחה בטופולוגיה האוקלידית ולכן הטופולוגיה של סורגנפרי חזקה מהטופולוגיה האוקלידית.

vi. אפשר גם להראות ממש בקלות (אותה הוכחה כמו של הממשיים) שקבוצת הרציונלים צפופה בישר של סורגנפרי מה שעושה אותו ספרבילי.

vii. נראה כעת שהיא לא B_2. נניח ש־$\gamma \subseteq \tau_s$ בסיס. לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים ש־$x \in [x, x+1) \in \tau_s$ ולכן קיימת $O_x \in \gamma$ כך ש־$x \in O_x \subseteq [x, x+1)$. אנחנו טוענים שאם $x \neq y$ אז גם $O_x \neq O_y$. נניח בלי הגבלת הכלליות ש־$x < y$. אם $O_x = O_y$ אז

$$x \in O_x = O_y \subseteq [y, y+1) \Rightarrow x \geq y$$

וזו סתירה. לכן יש התאמה חח"ע בין $x \in \mathbb{R}$ ו־$O_x \in \gamma$. בפרט $|\gamma| \geq |\mathbb{R}| = \aleph > \aleph_0$.

viii. מנגד, קל לראות ש־$(\mathbb{R}, \tau_s)$ מקיים את B_1 כי $\left\{ \left[x, \frac{1}{n}\right) \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ הוא בסיס בן מניה ב־$x \in \mathbb{R}$.

ix. ראינו בהרצאה שאם מרחב מטריזבילי, אז ספרביליות שקולה ל־B_2. אולם $(\mathbb{R}, \tau_s)$ הוא ספרבילי שלא מקיים את B_2 ולכן לא מטריזבילי.

9. השלימו את הטבלה

מרחב טופולוגי	הומוגני	מימד 0	B_1	B_2	FU
המרחב הדיסקרטי	כן	כן	כן	כן	כן
הטופולוגיה הטריוויאלית	כן	כן	כן	כן	כן
$\mathbb{R}^n$	כן	לא	כן	כן	כן
$[0,1]$	לא	לא	כן	כן	כן
$(\mathbb{Z}, d_p)$	כן	כן	כן	כן	כן
$(\mathbb{Q}, d_p)$	כן	כן	כן	כן	כן
$(\overline{\mathbb{Z}}, d_p)$	כן	כן	כן	כן	כן
$(\overline{\mathbb{Q}}, d_p)$	כן	כן	כן	כן	כן
l_1	כן	לא	כן	כן	כן
l_2	כן	לא	כן	כן	כן
l_∞	כן	לא	כן	לא	כן
$(C[0,1], d_\infty)$	כן	לא	כן	כן	כן
$(C[0,1], d_1)$	כן	לא	כן	כן	כן
$(\{a,b\}, \tau_{\text{Sierpiński}})$	לא	לא	כן	כן	כן
(X, τ_{cof}) עבור X אינסופי	כן	לא	רק אם X בן מניה	רק אם X בן מניה	?
(X, τ_{coc}) עבור X לא בן מניה	כן	לא	לא	לא	לא
$([0,1]^2, <_{lex}, \tau_{<_{lex}})$	לא	לא	כן	לא	כן
$(\mathbb{R}, \tau_s)$	כן	כן	כן	לא	כן
סינוס טופולוגי	לא	לא	כן	כן	כן