מבחן מסכם, מועד א' – קורס תורת המשחקים, 29/06/14

מרצה – ארז שיינר

הוראות – ניתן לענות על כל השאלות, כל שאלה שווה 40 נק'. כל ציון מעל 100 יעוגל למטה (ל100)

משך זמן המבחן – שעתיים וחצי.

הוראות: יש לענות על דפי השאלון בלבד. מחברת הבחינה תשתמש לכם כטיוטה ולא תבדק.

שאלה 1

א. מצאו את פתרון המשחק הבא באמצעות מחיקת אסטרטגיות נשלטות חזק, כאשר שחקן 1 (השמאלי ביותר) בעל אסטרטגיות B,A, שחקן 2 בעל אסטרטגיות 1,2, שחקן 3 בעל אסטרטגיות U,D ושחקן 4 בעל אסטרטגיות R,L.

A, 1

	L	R
U	0,1,0,3	0,2,2,2
D	3,1,-1,0	0,2,1,2

B, 1

	L	R
U	1,1,1,1	-1,3,0,2
D	0,0,0,1	1,2,-1,2

A, 2

	L	R
U	0,2,2,1	3,3,2,0
D	2,0,1,0	3,4,0,-1

B, 2

	L	R
U	-1,2,2,1	2,4,1,0
D	1,1,1,0	1,3,0,4

רשמו את האסטרטגיות **שמחקתם** לפי סדר המחיקה:

1. _____D______ 2. ______1_____ 3. ______B_____ 4. ______R_____

ב. **הוכיחו/הפריכו:** למשחק בסעיף א' **קיימת** נקודת שיווי משקל **יחידה**

יחידה: מחיקת אסטרטגיות שולטות חזק אינה מוחקת נקודות שיווי משקל.

קיימת: כמו כן, וקטור אסטרטגיות יחיד שהתקבל על ידי מחיקת אסטרטגיות שולטות חזק מהווה שיווי משקל.

כיוון שקיבלנו וקטור אסטרטגיות יחיד לאחר מחיקת אסטרטגיות נשלטות חזק, הוא מהווה נקודת שיווי משקל יחידה במשחק.

.2

א. **מצאו** את המקסמין והמינמקס של המשחק. אם למשחק יש **שיווי משקל**, הקיפו אותו בעיגול

1	1	0
2	-1	-3
1	-2	2

מקסמין ____0____ מינמקס ____1____

תזכורת: שחקן 1 יכול לבחור אסטרטגיה המבטיחה שלא יקבל פחות מערך המקסמין.
נא לא לטעות כפי שטעיתי בהרצאה האחרונה (:

ב. מצאו את שיווי המשקל במשחק הבא באמצעות אסטרטגיות מעורבות ו/או טהורות :

	L	R
T	2,2	0,3
B	1,1	1,0

נניח כי שחקן 1 משחק $[pT,(1-p)B]$ ושחקן 2 משחק $[qL,(1-q)R]$

אזי פונקציות התשלום הינן

$$U_1(p,q)=2pq+(1-p)q+(1-p)(1-q)=\mathrm{p}(2\mathrm{q}-1)+1$$

$$U_2(p,q)=2pq+3p(1-q)+(1-p)q=q(1-2p)+3\mathrm{p}$$

ולכן

$$BR_1(q)=\begin{cases}0 & q<\frac{1}{2}\\ [0,1] & q=\frac{1}{2}\\ 1 & q>\frac{1}{2}\end{cases} \qquad BR_2(p)=\begin{cases}1 & p<\frac{1}{2}\\ [0,1] & q=\frac{1}{2}\\ 0 & p>\frac{1}{2}\end{cases}$$

ומכאן נקודת שיווי המשקל היחידה הינה החיתוך בין שתי התגובות המיטביות $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

.3

א. פונקציות התשלום של שני שחקנים במשחק אסטרטגי רציף נתונות, כאשר $x, y \in [0,1]$

$$U_1(x,y) = -x^2 + 2\left(1-y^2\right)x + 1 \qquad\qquad U_2(x,y) = 2\sqrt{x}y + 3x - y^2$$

מצאו את שיווי המשקל של המשחק או הוכיחו שלא קיים כזה.

נחשב את התגובות המיטביות

$BR_1(y) = 1-y^2$, $BR_2(x) = \sqrt{x}$

לכן נקודת שיווי משקל הינה חיתוך בין שתי התגובות המיטביות, כלומר פתרון למערכת המשוואות:

$$x = 1-y^2$$
$$y = \sqrt{x}$$

ולכן שיווי המשקל הינו $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

ב. נביט במשחק מסעיף א' כמשחק בצורה רחבה בו שחקן 1 משחק ראשון, ולאחר מכן שחקן 2 מגיב.
כיצד תשובתכם תשתנה?

אם שחקן 1 בוחר x שחקן 2 בוודאי יבחר $BR_2(x)$.

לכן פונקציית התשלום של שחקן 1 היא למעשה

$$U_1(x, BR_2(x)) = U_1(x, \sqrt{x}) = -x^2 + 2(1-x)x + 1 = -3x^2 + 2x + 1$$

שחקן 1 ימקסם את התשלום שלו, ויבחר $x = \frac{1}{3}$ וסה"כ נקודת שיווי המשקל הינה

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$