נוסחאות של משטחים

נוסחאות כלליות:

א. משטח $S \subseteq \mathbb{R}^3$ יש פרמ' מקומית $\mathrm{X}: U \to \mathbb{R}^3$ חלקה ($Im(\mathrm{X}) \subseteq S$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$) בסביבה של כל נקודה $p \in S$ ($p \in Im(\mathrm{X})$). נקרא פה למשתנים של X u ו- v. נסמן X_1' לנגזרת לפי u ו- X_2' לנגזרת לפי v. צריך להתקיים ש- $\mathrm{X}_1'(u,v)$ ו- $\mathrm{X}_2'(u,v)$ בת"ל לכל $(u,v) \in U$.

לפי ההגדרה

$$g_{ij}(u,v) = \langle \mathrm{X}_i'(u,v), \mathrm{X}_j'(u,v) \rangle$$

המקדמים g_{ij} נקראים "התבנית היסודית הראשונה". הם סימטריים ביחס להחלפת i ו- j.

הוקטור נורמל הוא:

$$N(u,v) = \frac{1}{\|\mathrm{X}_1'(u,v) \times \mathrm{X}_2'(u,v)\|} \left(\mathrm{X}_1'(u,v) \times \mathrm{X}_2'(u,v) \right)$$

$\mathrm{X}_1'(u,v)$, $\mathrm{X}_2'(u,v)$ ו- $N(u,v)$ הם בסיס למרחב עבור כל (u,v). ולכן לכל (u,v) ישנם מקדמים $L_{ij}(u,v)$, $\Gamma_{ij}^k(u,v)$ שמקיימים:

$$\mathrm{X}_{ij}''(u,v) = \Gamma_{ij}^1(u,v)\mathrm{X}_1'(u,v) + \Gamma_{ij}^2(u,v)\mathrm{X}_2'(u,v) + L_{ij}(u,v)N(u,v)$$

אפשר לחשב את המקדמים L_{ij}, הקרואים "התבנית היסודית השנייה", ע"י

$$L_{ij}(u,v) = \langle \mathrm{X}_{ij}''(u,v), N(u,v) \rangle$$

הם סימטריים ביחס להחלפת i ו- j.

המקדמים $\Gamma_{ij}^k(u,v)$ נקראים סימני כריסטופל. הם סימטריים ביחס להחלפת i ו- j אבל לא ביחס להחלפת k אם כל אחד מהפרמטרים האחרים. בשביל לחשב אותם נגדיר:

$$g_{ij:1}(u,v) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u}(u,v)\,,\, g_{ij:2}(u,v) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial v}(u,v)$$

ובנוסף נגדיר את $g^{ij}(u,v)$ להיות המקדמים של המטריצה G^{-1} ההפוכה ל

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$$

g^{ij} גם סימטריים ביחס להחלפת i ו- j.

ניתן לחשב את סימני כריסטופל לפי הנוסחא

$$\Gamma_{ij}^k(u,v) = \frac{1}{2}\left(g_{im:j} + g_{jm:i} - g_{ij:m}\right)g^{mk}$$

זה בסכימת איינשטיין. ז"א שאמור להיות שם $\sum_{m=1}^{2}$.

הוקטורים $N_1'(u,v)$ ו- $N_2'(u,v)$ מאונכים ל- $N(u,v)$, ולכן הם צירוף לניארי של אברי הבסיס האחרים. ישנם מקדמים $L_i^j(u,v)$ המקיימים:

$$N_i'(u,v) = L_i^1(u,v)\mathrm{X}_1'(u,v) + L_i^2(u,v)\mathrm{X}_2'(u,v)$$

L_i^j נקראים מקדמי ווינגרטן. הם **לא** סימטריים ביחס להחלפת i ו- j.

אם נסמן

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} L_1^1 & L_1^2 \\ L_2^1 & L_2^2 \end{pmatrix}$$

יתקיים $L = -SG$ או, לחלופין, $S = -LG^{-1}$. אז ניתן לחשב את S מ- L ולהיפך.

העקמומיות הראשיות k_1, k_2 הן הערכים העצמיים של S. עקמומיות גאוס K היא הדטרמיננטה שלה $K = k_1 k_2 = \det S$ והעקמומיות החציונית H היא חצי מהעקבה שלה

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{\operatorname{Tr} S}{2}$$

יש מספר נוסחאות לחישוב K. הן כוללות:

$$K = \det S = L_1^1 L_2^2 - L_2^1 L_1^2$$

$$K = \frac{\det L}{\det g}$$

$$K = -\frac{2}{g_{11}} L_{1\{1} L_{2]}^2 = \frac{L_{12} L_1^2 - L_{11} L_2^2}{g_{11}}$$

$$K = \frac{2}{g_{11}} \left(\Gamma_{1[1:2]}^2 + \Gamma_{1\{1}^i \Gamma_{2]i}^2 \right) = \frac{\Gamma_{11:2}^2 - \Gamma_{12:1}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2}{g_{11}}$$

עבור מסילה $\alpha(t) = \big(u(t), v(t)\big)$ ב- U, האורך של המסילה $\beta(t) = \mathrm{X} \circ \alpha(t) = \mathrm{X}\big(u(t), v(t)\big)$, עבור $t_1 < t < t_2$, הוא

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\begin{pmatrix} u(t) & v(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11}\big(u(t), v(t)\big) & g_{12}\big(u(t), v(t)\big) \\ g_{12}\big(u(t), v(t)\big) & g_{22}\big(u(t), v(t)\big) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}}\, dt$$

המשוואות הגאודזיות הן

$$\frac{d^2 u}{(dt)^2} + \Gamma_{11}^1 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^1 \frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2 v}{(dt)^2} + \Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^2 \frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \Gamma_{22}^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = 0$$

הפתרונות שלהם הם קווים גאודזים – ה"ישרים" של המשטח.

שטח של התמונה של תחום $\Omega \subseteq U$ הוא $\iint_\Omega \sqrt{\det \begin{pmatrix} g_{11}(u,v) & g_{12}(u,v) \\ g_{12}(u,v) & g_{22}(u,v) \end{pmatrix}}\, du dv$

ב. משטח אבסטרקטי:

זו רק קבוצה U עם תבנית יסודית ראשונה $g_{ij}(u,v)$. כל מה שמוגדר רק לפי התבנית הזאת, למשל

$$\Gamma_{ij}^k(u,v) = \frac{1}{2}\big(g_{im:j} + g_{jm:i} - g_{ij:m}\big) g^{mk}$$

ו-

$$K = \frac{2}{g_{11}} \left(\Gamma_{1[1:2]}^2 + \Gamma_{1\{1}^i \Gamma_{2]i}^2 \right) = \frac{\Gamma_{11:2}^2 - \Gamma_{12:1}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2}{g_{11}}$$

עדיין מוגדרים ככה.

משוואות וקווים גאודזיים, אורך מסילות, ושטח, מוגדרים אותו דבר.

ג. פרמטריזציה איזוטרמית:

זו פרמטריזציה עבורה

$$G = f^2(u,v)\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

לאיזשהי פונקציה f, ז"א ש- $g_{11}(u,v) = g_{22}(u,v) = f^2(u,v)$ ו- $g_{12}(u,v) = 0$.

במקרה הזה נגדיר $\mu(u,v) = \ln f\,(u,v)$ ואז יש נוסחאות קצרות לסימני קריסטופל.
$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \mu'_1$, $\Gamma^1_{22} = -\mu'_1$, $\Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22} = \mu'_2$, $\Gamma^2_{11} = -\mu'_2$.

בנוסף ישנו משהו שנקרא "אופרטור לפלס בלטרמי". זהו האופרטור

$$\Delta_{LB} = \frac{1}{f}\left(\frac{\partial^2}{(\partial u)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial v)^2}\right)$$

ז"א שעבור כל פונקציה $h(u,v)$ מתקיים

$$\Delta_{LB}(h) = \frac{1}{f}\left(\frac{\partial^2 h}{(\partial u)^2} + \frac{\partial^2 h}{(\partial v)^2}\right)$$

ישנו משפט שמוצא את עקמומיות גאוס בקלות.

$$K = -\frac{1}{2}\Delta_{LB}(\mu) = -\frac{1}{2}\Delta_{LB}(\ln f) = \frac{1}{f}\left(\frac{\partial^2 \ln f}{(\partial u)^2} + \frac{\partial^2 \ln f}{(\partial v)^2}\right)$$
$$= \frac{1}{f}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{f'_u}{f}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{f'_v}{f}\right)\right) = \frac{f''_{uu}\cdot f + (f'_u)^2 + f''_{vv}\cdot f + (f'_v)^2}{f^3}$$

וזה הכול.

נוסחאות של משטחי סיבוב:

א. בכלליות

משטח הסיבוב של $\gamma(t) = \big(f(t), 0, g(t)\big)$ עם $t_1 < t < t_2$ ואם $f(t) > 0$ הוא $\mathrm{X}(\phi,\theta) = \big(f(\phi)\cos\theta, f(\phi)\sin\theta, g(\phi)\big)$. $t_1 < \phi < t_2$, $0 < \theta < 2\pi$.

המאפיינים שלו הם:

$$\mathrm{X}'_1 = \big(f'(\phi)\cos\theta, f'(\phi)\sin\theta, g'(\phi)\big)$$
$$\mathrm{X}'_2 = (-f(\phi)\sin\theta, f(\phi)\cos\theta, 0)$$
$$\mathrm{X}''_{11} = \big(f''(\phi)\cos\theta, f''(\phi)\sin\theta, g''(\phi)\big)$$
$$\mathrm{X}''_{12} = (-f'(\phi)\sin\theta, f'(\phi)\cos\theta, 0)$$
$$\mathrm{X}''_{22} = (-f(\phi)\cos\theta, -f(\phi)\sin\theta, 0)$$
$$\mathrm{X}'_1 \times \mathrm{X}'_2 = \big(-f(\phi)g'(\phi)\cos\theta, -f(\phi)g'(\phi)\sin\theta, f(\phi)f'(\phi)\big)$$
$$\|\mathrm{X}'_1 \times \mathrm{X}'_2\| = |f(\phi)|\sqrt{f'^2(\phi) + g'^2(\phi)}$$
$$N = \frac{1}{\sqrt{f'^2(\phi) + g'^2(\phi)}}\big(-g'(\phi)\cos\theta, -g'(\phi)\sin\theta, f'(\phi)\big)$$

$$G = \begin{pmatrix} f'^2(\phi) + g'^2(\phi) & 0\\ 0 & f^2(\phi)\end{pmatrix}$$
$$L = \frac{1}{\sqrt{f'^2(\phi) + g'^2(\phi)}}\begin{pmatrix} f'(\phi)g''(\phi) - g'(\phi)f''(\phi) & 0\\ 0 & f(\phi)g'(\phi)\end{pmatrix}$$

$$S=-LG^{-1}=\frac{-1}{\sqrt{f'^2(\phi)+g'^2(\phi)}}\begin{pmatrix}\frac{f'(\phi)g''(\phi)-g'(\phi)f''(\phi)}{f'^2(\phi)+g'^2(\phi)} & 0\\ 0 & \frac{g'(\phi)}{f(\phi)}\end{pmatrix}$$

$$k_1=\frac{g'(\phi)f''(\phi)-f'(\phi)g''(\phi)}{\sqrt{f'^2(\phi)+g'^2(\phi)}^3}$$

$$k_2=\frac{-g'(\phi)}{f(\phi)\sqrt{f'^2(\phi)+g'^2(\phi)}}$$

$$K=k_1k_2=\det S=\frac{f'(\phi)g'(\phi)g''(\phi)-g'^2(\phi)f''(\phi)}{f(\phi)\left(f'^2(\phi)+g'^2(\phi)\right)^2}$$

$$H=\frac{k_1+k_2}{2}=\frac{\operatorname{tr} S}{2}$$

$$=\frac{f(\phi)g'(\phi)f''(\phi)-f(\phi)f'(\phi)g''(\phi)-f'^2(\phi)g'(\phi)-g'^3(\phi)}{2f(\phi)\sqrt{f'^2(\phi)+g'^2(\phi)}^3}$$

$$G_1'=\begin{pmatrix}2f'(\phi)f''(\phi)+2g'(\phi)g''(\phi) & 0\\ 0 & 2f(\phi)f'(\phi)\end{pmatrix}\ ,\ G_2'=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{11}^1=\frac{f'(\phi)f''(\phi)+g'(\phi)g''(\phi)}{f'^2(\phi)+g'^2(\phi)}$$

$$\Gamma_{12}^2=\frac{f'(\phi)}{f(\phi)}$$

$$\Gamma_{22}^1=\frac{f(\phi)f'(\phi)}{f'^2(\phi)+g'^2(\phi)}$$

$$\Gamma_{11}^2=\Gamma_{12}^1=\Gamma_{22}^2=0$$

אם המסילה γ סגורה - $\left(f(t_1),0,g(t_1)\right)=\left(f(t_2),0,g(t_2)\right)$ – אז:

אורך ϕ – לולאה הוא אורך הלולאה γ - $\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)dt}$

אורך θ – לולאה הוא אורך המסלול הכי קצר (על המשטח) שמקיף את ציר הסיבוב - $2\pi\ \min_t f(t)$.

הפרמטר הקונפורמי הוא

$$i\max\left\{2\pi\div\int_{t_1}^{t_2}\frac{\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}}{f(t)}dt\,,\frac{1}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}}{f(t)}dt\right\}$$

הסיבה היא שאנחנו מחפשים "פרמטריזציה קונפורמית" למשטח. פרמטריזציה שעבורה G היא מטרציה סקאלרית $G=\begin{pmatrix}C&0\\0&C\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. שימו לב ש- C היא פונקציה, לא קבוע.

קיימת פרמטריזציה אחרת למסילה

$$h(x_i)=t_i\ \ ,\ \ x_1<x<x_2\ \ ,\ \ \tilde\gamma(x)=\gamma\left(h(x)\right)=\left(f\left(h(x)\right),0,g\left(h(x)\right)\right)$$

שמקיימת

$$h'(x)=\frac{f\big(h(x)\big)}{\sqrt{f'^2\big(h(x)\big)+g'^2\big(h(x)\big)}}$$

והיא נותנת פרמ' אחר למשטח

$$\tilde{X}(\varphi,\theta)=\Big(f\big(h(\varphi)\big)\cos\theta\,,f\big(h(\varphi)\big)\sin\theta\,,g\big(h(\varphi)\big)\Big)\ ,\ x_1<\varphi<x_2\ ,$$

$0<\theta<2\pi$.

והתבנית היסודית שלה היא

$$G=\begin{pmatrix}\Big(f\big(h(\varphi)\big)\Big)'^2+\Big(g\big(h(\varphi)\big)\Big)'^2 & 0\\ 0 & f^2\big(h(\varphi)\big)\end{pmatrix}=G$$

$$=\begin{pmatrix}h'^2(\varphi)\Big(f'^2\big(h(\varphi)\big)+g'^2\big(\phi h(\varphi)\big)\Big) & 0\\ 0 & f^2\big(h(\varphi)\big)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}f^2\big(h(\varphi)\big) & 0\\ 0 & f^2\big(h(\varphi)\big)\end{pmatrix}$$

וזה היה בסדר.

כעת, המשטח שקול קונפורמית למשטח סגור שטוח (עם תבנית יסודית $\left(G=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ אבל עם "מרחב קואורדינטות" $x_1<\varphi<x_2$, $0<\theta<2\pi$. זה טורוס שטוח מלבני שהמקדם הקונפורמי שלו הוא

$$i\max\left\{\frac{2\pi}{x_2-x_1},\frac{(x_2-x_1)}{2\pi}\right\}$$

לבסוף, נשים לב ש-

$$x_2-x_1=\int_{x_1}^{x_2}1dx=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}}{f(t)}dt$$

כי

$$dt=h'(x)dx=\frac{f\big(h(x)\big)}{\sqrt{f'^2\big(h(x)\big)+g'^2\big(h(x)\big)}}dx=\frac{f(t)}{\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}}dx$$

ולכן

$$dx=\frac{\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}}{f(t)}dt$$

נשים לב משאין שום צורך למצוא את $h(x)$, צריך רק את x_2-x_1 ויש לנו נוסחא לזה.

ב. אם משטח הסיבוב של $1=\|\gamma'(t)\|=f'^2(t)+g'^2(t)$ אז: המאפיינים שלו הם:

$$\|X_1'\times X_2'\|=|f(\phi)|$$

$$N=\big(-g'(\phi)\cos\theta\,,-g'(\phi)\sin\theta\,,f'(\phi)\big)$$

$$G=\begin{pmatrix}1&0\\0&f^2(\phi)\end{pmatrix}$$

$$L=\begin{pmatrix} f'(\phi)g''(\phi)-g'(\phi)f''(\phi) & 0 \\ 0 & f(\phi)g'(\phi) \end{pmatrix}$$
$$S=-LG^{-1}=\begin{pmatrix} g'(\phi)f''(\phi)-f'(\phi)g''(\phi) & 0 \\ 0 & -\frac{g'(\phi)}{f(\phi)} \end{pmatrix}$$
$$k_1=g'(\phi)f''(\phi)-f'(\phi)g''(\phi)$$
$$k_2=-\frac{g'(\phi)}{f(\phi)}$$
$$K=k_1k_2=\det S=\frac{g'^2(\phi)f''(\phi)-f'(\phi)g'(\phi)g''(\phi)}{f(\phi)}$$
$$H=\frac{k_1+k_2}{2}=\frac{\operatorname{tr}S}{2}=\frac{f(\phi)g'(\phi)f''(\phi)-f(\phi)f'(\phi)g''(\phi)-g'(\phi)}{2f(\phi)}$$
$$G_1'=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2f(\phi)f'(\phi) \end{pmatrix}\ ,\ G_2'=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Gamma_{12}^2=\frac{f'(\phi)}{f(\phi)}$$
$$\Gamma_{22}^1=f(\phi)f'(\phi)$$
$$\Gamma_{11}^1=\Gamma_{11}^2=\Gamma_{12}^1=\Gamma_{22}^2=0$$

אם המסילה γ סגורה - $\big(f(t_1),0,g(t_1)\big)=\big(f(t_2),0,g(t_2)\big)$ – אז:

אורך ϕ – לולאה הוא אורך הלולאה γ - t_2-t_1

אורך θ – לולאה הוא אורך המסלול הכי קצר (על המשטח) שמקיף את ציר הסיבוב - $2\pi\ \min_t f(t)$.

הפרמטר הקונפורמי הוא

$$i\max\left\{2\pi\div\int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{f(t)}dt\,,\frac{1}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{f(t)}dt\right\}$$

נוסחאות של גרפים:

גרף של פונקציה $f:U\to\mathbb{R}^3$, עם $U\subseteq\mathbb{R}^2$, הוא המשטח עם הפרמטריזציה

$\mathrm{X}(u,v)=\big(u,v,f(u,v)\big)$, $(u,v)\in U$.

המאפיינים שלו הם:

$$\mathrm{X}_1'=(1,0,f_u')$$
$$\mathrm{X}_2'=(0,1,f_v')$$
$$\mathrm{X}_{11}''=(0,0,f_{uu}'')$$
$$\mathrm{X}_{12}''=(0,0,f_{uv}'')$$
$$\mathrm{X}_{22}''=(0,0,f_{vv}'')$$
$$\mathrm{X}_1'\times\mathrm{X}_2'=(-f_u',-f_v',1)$$
$$\|\mathrm{X}_1'\times\mathrm{X}_2'\|=\sqrt{f_u'^2+f_v'^2+1}$$
$$N=\frac{1}{\sqrt{f_u'^2+f_v'^2+1}}(-f_u',-f_v',1)$$

$$G=\begin{pmatrix} f_u'^2+1 & f_u'f_v' \\ f_u'f_v' & f_v'^2+1 \end{pmatrix}$$

$$L=\frac{1}{\sqrt{f_u'^2+f_v'^2+1}}\begin{pmatrix} f''_{uu} & f''_{uv}\\ f''_{uv} & f''_{vv}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{f_u'^2+f_v'^2+1}}H_f$$

כאשר H_f היא מטריצת ההסיאן של f.

$$G^{-1}=\frac{1}{f_u'^2+f_v'^2+1}\begin{pmatrix} f_v'^2+1 & -f_u'f_v'\\ -f_u'f_v' & f_u'^2+1\end{pmatrix}$$

$$S=-LG^{-1}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{f_u'^2+f_v'^2+1}^3}\begin{pmatrix} f''_{uu}\left(f_v'^2+1\right)-f''_{uv}f_u'f_v' & f''_{uv}\left(f_u'^2+1\right)-f''_{uu}f_u'f_v'\\ f''_{uv}\left(f_v'^2+1\right)-f''_{vv}f_u'f_v' & f''_{vv}\left(f_u'^2+1\right)-f''_{uv}f_u'f_v'\end{pmatrix}$$

$$k_1=\frac{g'(\phi)f''(\phi)-f'(\phi)g''(\phi)}{\sqrt{f'^2(\phi)+g'^2(\phi)}^3}$$

$$k_2=\frac{-g'(\phi)}{f(\phi)\sqrt{f'^2(\phi)+g'^2(\phi)}}$$

$$K=\det S=\frac{1}{\left(f_u'^2+f_v'^2+1\right)^3}\Big(f''_{uu}f''_{vv}\left(f_u'^2f_v'^2+f_u'^2+f_v'^2+1\right)+f''^2_{uv}f_u'^2f_v'^2$$
$$-f''_{uu}f''_{uv}\left(f_u'f_v'^3+f_u'f_v'\right)-f''_{vv}f''_{uv}\left(f_u'^3f_v'+f_u'f_v'\right)\Big)$$
$$-\Big(f''_{uu}f''_{vv}f_u'^2f_v'^2+f''^2_{uv}\left(f_u'^2f_v'^2+f_u'^2+f_v'^2+1\right)$$
$$-f''_{uu}f''_{uv}\left(f_u'f_v'^3+f_u'f_v'\right)-f''_{vv}f''_{uv}\left(f_u'^3f_v'+f_u'f_v'\right)\Big)$$
$$=\frac{1}{\left(f_u'^2+f_v'^2+1\right)^3}\Big(f''_{uu}f''_{vv}\left(f_u'^2+f_v'^2+1\right)$$
$$-f''^2_{uv}\left(f_u'^2+f_v'^2+1\right)\Big)=\frac{f''_{uu}f''_{vv}-f''^2_{uv}}{\left(f_u'^2+f_v'^2+1\right)^2}$$
$$=\frac{\det H_f}{\left(f_u'^2+f_v'^2+1\right)^2}$$

כאשר, שוב, H_f היא מטריצת ההסיאן של f.

$$H=\frac{\operatorname{tr}S}{2}=\frac{f''_{uu}\left(f_v'^2+1\right)+f''_{vv}\left(f_u'^2+1\right)-2f''_{uv}f_u'f_v'}{\sqrt{f_u'^2+f_v'^2+1}^3}$$

סימני קריסטופל:

$$G_{:1}=\begin{pmatrix} 2f''_{uu}f_u' & f''_{uv}f_u'+f''_{uu}f_v'\\ f''_{uv}f_u'+f''_{uu}f_v' & 2f''_{uv}f_v'\end{pmatrix}$$

$$G_{:2}=\begin{pmatrix} 2f''_{uv}f_u' & f''_{vv}f_u'+f''_{uv}f_v'\\ f''_{vv}f_u'+f''_{uv}f_v' & 2f''_{vv}f_v'\end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{11}^{1} = \frac{f''_{uu} f'_u}{{f'_u}^2 + {f'_v}^2 + 1}$$

$$\Gamma_{11}^{2} = \frac{f''_{uu} f'_v}{{f'_u}^2 + {f'_v}^2 + 1}$$

$$\Gamma_{12}^{1} = \frac{f''_{uv} f'_u}{{f'_u}^2 + {f'_v}^2 + 1}$$

$$\Gamma_{12}^{2} = \frac{f''_{uv} f'_v}{{f'_u}^2 + {f'_v}^2 + 1}$$

$$\Gamma_{22}^{1} = \frac{f''_{vv} f'_u}{{f'_u}^2 + {f'_v}^2 + 1}$$

$$\Gamma_{22}^{2} = \frac{f''_{vv} f'_v}{{f'_u}^2 + {f'_v}^2 + 1}$$

ז"א שבכלליות

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{f''_{ij} f'_k}{{f'_1}^2 + {f'_2}^2 + 1}$$