גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית - שבוע 1

23 ביולי 2015

נתחיל בחזרה על דברים ידועים (ב"ידועים" הכוונה למשהו שאולי ראיתם פעם איפשהו).

נתעסק בעיקר עם וקטורים ב$-\mathbb{R}^2$ וב$-\mathbb{R}^3$.

מכפלה סקלרית:

לכל שני וקטורים $u,v\in\mathbb{R}^n$, נגדיר:

$$\langle u,v\rangle=\sum_{i=1}^{n}u^iv^i$$

כאשר u^i היא הקואורדינטה ה$-i$ של הוקטור u.

אפשר להביע את המכפלה הסקלרית גם באופן גיאומטרי:

$$\langle u,v\rangle=\|u\|\cdot\|v\|\cdot\cos\theta$$

כאשר $\|u\|$ מסמל את האורך של u ו$-\theta$ היא הזווית החדה בין שני הוקטורים.

תכונות של המכפלה הסקלרית:

1. $u\perp v$ אם ורק אם u,v מאונכים אם ורק אם $\langle u,v\rangle=0$.
2. סימטריות: $\langle u,v\rangle=\langle v,u\rangle$.
3. אי שליליות: $\langle u,u\rangle\geq 0$ ושוויון מתקיים אם ורק אם $\langle u,u\rangle=0$.
4. פילוג: $\langle u,v+w\rangle=\langle u,v\rangle+\langle u,w\rangle$.

לכל $u,v\in\mathbb{R}^n$.

מכפלה וקטורית:

המכפלה הוקטורית מוגדרת רק לוקטורים מ$-\mathbb{R}^3$, ותוצאתה היא וקטור (ולא סקלר).

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix} = (u^2v^3 - v^2u^3, u^3v^1 - u^1v^3, u^1v^2 - v^1u^2)$$

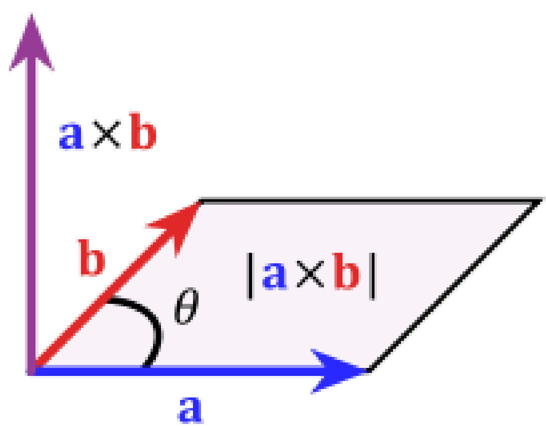
גיאומטרית, המכפלה הוקטורית מחשבת את שטח המקבילית שנוצרת ע"י הוקטורים.

כלומר, $\|a \times b\|$ מבטא את נפח המקבילית הנוצרת ע"י a, b.

אפשר להביע זאת גם באופן גיאומטרי: $\|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin\theta$.

כמו כן, הוקטור $a \times b$ מאונך לוקטורים a, b (ולכן מאונך למישור הנפרש על ידיהם), ובאוריינטציה חיובית, כלומר:

$$\det(a, b, a \times b) > 0$$



תכונות של המכפלה הוקטורית:

1. אנטי סימטריות: $a \times b = -b \times a$.
2. פילוג: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.
3. זהות יעקובי: $a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$.

לכל $a, b, c \in \mathbb{R}^3$.

איזומטריות:

תהי X קבוצה. מטריקה על X היא פונקציה $d : X \times X \to \mathbb{R}$ המקיימת:

1. אי שליליות: $d(x,y) \geq 0$ ושוויון מתקיים אם ורק אם $x = y$.
2. סימטריות: $d(x,y) = d(y,x)$.
3. אי־שוויון המשולש: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$.

לכל $x, y, z \in X$.

אינטואיטיבית, מטריקה מגדירה מרחק בקבוצה X.

בהינתן שני מרחבים מטריים, $(X, d_X), (Y, d_Y)$, פונקציה $f : X \to Y$ נקראת איזומטריה אם לכל $u, v \in X$:

$$d_X(u,v) = d_Y(f(u), f(v))$$

כלומר, f שומרת על מרחק.

<u>תרגיל:</u>

תהיינה $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ איזומטריות. האם הפונקציות הבאות הן איזומטריות?

*אם לא נאמר במפורש אחרת, המטריקה שלנו היא המטריקה האוקלידית הישנה והטובה.

א. $h = f + g$.

<u>פתרון:</u>

לא בהכרח. נסתכל, למשל, על: $f(x) = g(x) = x$.

ברור שאלו איזומטריות, ומתקיים: $h(x) = 2x$, שאינה איזומטריה, למשל:

$$1 = d(0, e_1) \neq d(h(0), h(e_1)) = d(0, 2e_1) = 2$$

ב. כאשר $n = 3$, $h = f \times g$.

<u>פתרון:</u>

לא. נשתמש באותן פונקציות מהסעיף הקודם. נקבל:

$$h = f \times g = f \times f = 0$$

$f \times f$ היא דטרמיננטה עם שתי שורות זהות ולכן מתאפסת.

פונקציית האפס היא כמובן לא איזומטריה.

ג. $h = f \circ g$.

<u>פתרון:</u>

כן. נראה זאת:

$$d(h(u), h(v)) = d(f(g(u)), f(g(v))) = d(g(u), g(v)) = d(u, v)$$

המעבר השני נובע מכך ש$-f$ איזומטריה, והמעבר האחרון נובע מכך ש$-g$ איזומטריה.

ד. $h = c \cdot f$ עבור $c \in \mathbb{R}$ קבוע.

<u>פתרון:</u>

נבדוק:

$$d(h(u), h(v)) = d(cf(u), cf(v)) = |c| \cdot d(u, v)$$

ולכן h איזומטריה אם ורק אם $|c| = 1$.

<u>תרגיל:</u>

תהי S^2 ספירת היחידה ב$-\mathbb{R}^3$, כלומר:

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$$

נגדיר פונקציה $d : S^2 \times S^2 \to \mathbb{R}$ ע"י:

$$d(x, y) = \arccos(\langle x, y \rangle)$$

הראו שפונקציה זו היא מטריקה.

<u>פתרון:</u>

ראשית, נזכור שמתקיים:

$$\langle x,y\rangle = \|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos\theta$$

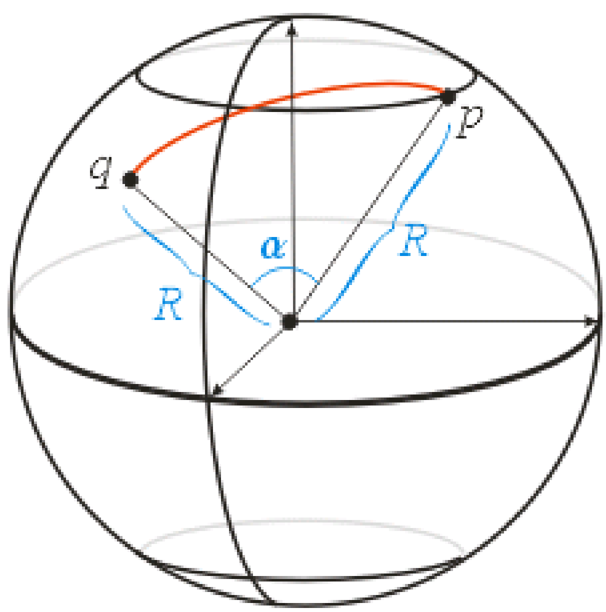
מכיוון ש-$x,y\in S^2$, $\|x\|=\|y\|=1$, ולכן:

$$d(x,y)=\arccos\left(\langle x,y\rangle\right)=\arccos(\|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos\theta)=\arccos(\cos\theta)=\theta$$

ארקוסינוס אכן הופך את הקוסינוס, כי θ נמצאת בתחום $[0,\pi]$ (זו הזווית הקטנה בין הוקטורים).

בכל אופן, מכאן קל לראות שהתכונות הנדרשות ממטריקה אכן מתקיימות.

כמו שאמרנו, מטריקה, אינטואיטיבית, מודדת מרחק; כאן הגדרנו מרחק על הספירה באמצעות הזווית שבין הוקטורים.



בין שני הוקטורים p,q נעביר מעגל גדול (שמרכזו בראשית ורדיוסו 1), ו$-\alpha$ הזווית ביניהם.

אפשר כמובן למדוד את אורך הקשת שבין הנקודות.

עקומות:

עקומה היא פונקציה $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ (צורה זו נקראת פרמטריזציה; אפשר להציג עקומות גם בצורה סתומה).

עקומה חלקה היא עקומה גזירה ברציפות (אינסוף פעמים).

עקומה רגורלית היא עקומה שוקטור הנגזרות שלה שונה מאפס, כלומר $\|\gamma'(t)\| \neq 0$ לכל $t \in [a,b]$.

וקטור הנגזרות $\gamma'(t)$ הוא הוקטור המשיק לעקומה.

לדוגמה, מעגל היחידה נתון על ידי הפרמטריזציה:

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$$

<u>תרגיל:</u>

מצאו פרמטריזציה של מעגל היחידה, לא כולל הנקודה $(-1,0)$, באמצעות t שהוא המרחק בין הראשית לחיתוך של ציר ה$-y$ והמיתר בין הנקודה ל$-(-1,0)$.

<u>פתרון:</u>

נתאר את הנקודות (x,y) שנמצאות על המעגל באמצעות t.

המיתר בין $(-1,0)$ לנקודה (x,y) חותך את ציר ה$-y$ בנקודה $(0,t)$; t הרי מוגדר להיות המרחק בין הראשית לחיתוך עם ציר ה$-y$ של המיתר.

לכן, שיפוע המיתר הוא:

$$M = \frac{t-0}{0-(-1)} = t$$

ולכן משוואת המיתר היא:

$$y - 0 = t(x - (-1))$$

כלומר $y = t(x+1)$. הנקודה (x, y) שלנו נמצאת על המיתר ועל המעגל, ולכן אפשר להציב את משוואת המיתר במשוואת המעגל $x^2 + y^2 = 1$:

$$x^2 + (t(x+1))^2 = 1$$

$$(1+t^2)x^2 + 2t^2x + t^2 - 1 = 0$$

זו משוואה ריבועית; נפתור אותה:

$$x_{1,2} = \frac{-2t^2 \pm \sqrt{(2t^2)^2 - 4(1+t^2)(t^2-1)}}{2(1+t^2)} = \frac{-2t^2 \pm 2}{2(1+t^2)}$$

אם נבחר במינוס נקבל $x = -1$ והוא לא מתאים; לכן, נבחר בפלוס ונקבל:

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

ולכן:

$$y = t(x+1) = t\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} + 1\right) = t\left(\frac{1-t^2+1+t^2}{1+t^2}\right) = \frac{2t}{1+t^2}$$

כלומר, הפרמטריזציה שלנו תהיה:

$$\gamma(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$$

כאשר $t \in \mathbb{R}$. נשים לב שאכן קיבלנו את מעגל היחידה:

$$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 = 1$$

פרמטריזציה טבעית:

אפשר לשנות פרמטריזציה של עקומה באופן כזה שמקבלים את אותה העקומה. דוגמה די נאיבית היא לשנות מעט את הפרמטריזציה של מעגל היחידה כך:

$$\gamma(t) = (\cos\frac{t}{2}, \sin\frac{t}{2}), t \in [0, 4\pi]$$

הפרמטריזציה הטבעית מחושבת על ידי הנוסחה:

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(x)\| \, dx$$

זו s כפונקציה של t. ממנה מחלצים את t כפונקציה של s ומציבים ב$-\gamma$.

פרמטריזציה זו נקראת גם פרמטריזציית אורך קשת (חשבו על s ועל הנוסחה לחישוב אורך עקומה שראינו באינפי 4) וגם פרמטריזציית מהירות יחידה.

בפרמטריזציה זו, $\|\gamma'(t(s))\| = \|\gamma'(s)\| = 1$, כלומר המשיק הוא תמיד משיק יחידה.

<u>תרגיל:</u>

מצאו פרמטר טבעי לעקומות המישוריות הבאות:

א. $y = mx + n$.

<u>פתרון:</u>

קודם כל, ניקח פרמטריזציה כלשהי של העקומה, למשל:

$$\gamma(t) = (t, mt + n)$$

אם כן: $\gamma'(t) = (1, m)$ ולכן: $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+m^2}$. לכן:

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(x)\| \, dx = \int_0^t \sqrt{1+m^2} dx = t\sqrt{1+m^2}$$

ולכן אם נבטא את t כפונקציה של s נקבל:

$$t(s) = \frac{s}{\sqrt{1+m^2}}$$

והפרמטריזציה החדשה תהיה:

$$\gamma(s)=\left(\frac{s}{\sqrt{1+m^2}},\frac{ms}{\sqrt{1+m^2}}+n\right)$$

ואפשר לראות שאכן $\|\gamma'(s)\|=1$.

ב. $y=x^2$.

<u>פתרון:</u>

שוב, ניקח פרמטריזציה כלשהי של העקומה, למשל:

$$\gamma(t)=(t,t^2)$$

אם כן: $\gamma'(t)=(1,2t)$ ולכן $\|\gamma'(t)\|=\sqrt{1+4t^2}$. לכן:

$$s(t)=\int_0^t\|\gamma'(x)\|\,dx=\int_0^t\sqrt{1+4x^2}dx$$

זהו האינטגרל הטריוויאלי מיודענו, ונקבל:

$$s(t)=t\sqrt{\frac{1}{4}+t^2}+\frac{\ln\left(t+\sqrt{\frac{1}{4}+t^2}\right)}{4}$$

ולא פשוט להפוך ולבטא את t כפונקציה של s. אם כן, פרמטריזציה טבעית היא לא תמיד קלה להשגה.

כעת, נתעמק מעט ב**עקומות מישוריות**.

תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ עקומה חלקה ורגולרית. נגדיר שני וקטורים:

א. משיק היחידה לעקומה γ הוא: $\hat{T}(s)=\gamma'(s)$, והוא מקיים: $\left\|\hat{T}\right\|=1$.

ב. נורמל היחידה, $\hat{N}(s)$ הוא וקטור המקיים:

1. $\hat{N}\perp\hat{T}$.
2. $\left(\hat{T},\hat{N}\right)$ בסיס חיובי, כלומר: $\det(\hat{T},\hat{N})=1$.

לכל פרמטריזציה, לאו דווקא טבעית, אפשר להגדיר:

$$\hat{N}(t) = R_{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

כאשר:

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

היא מטריצת סיבוב ב$-\frac{\pi}{2}$ נגד כיוון השעון. כלומר, הכפלת וקטור במטריצה תסובב אותו ב-90° מעלות.

*באופן כללי, מטריצת סיבוב ב$-\theta$ נגד כיוון השעון היא:

$$R_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

עקמומיות:

בהינתן עקומה, אנו מעוניינים לדעת עד כמה היא, ובכן, עקומה.

העקמומיות היא מדד המודד זאת. איך נחליט עד כמה כל עקומה באמת עקומה?

דרך א': נתחיל בקו ישר. מה תהיה העקמומיות של קו ישר? קו ישר כלל אינו עקום, הרי הוא ישר! לכן העקמומיות של קו ישר היא 0.

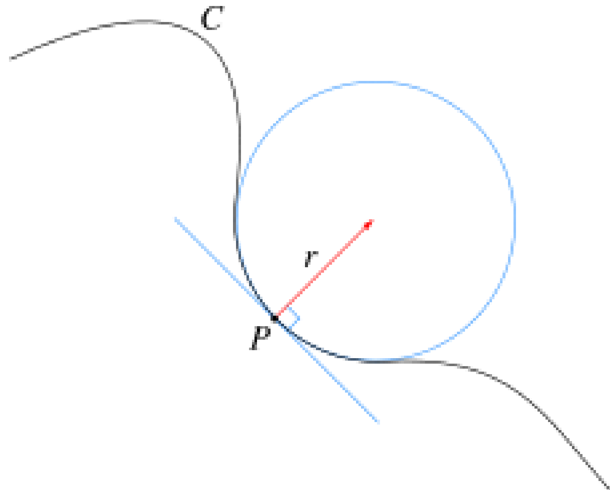
העקומח הבאה בתור אחרי קו ישר היא מעגל. עד כמה מעגל עקום? נשים לב שככל המעגל גדול יותר, הוא פחות עקום; ככל שהמעגל קטן יותר, אנחנו מתעקמים יותר מהר לאורך המעגל.

אפשר להסתכל על זה גם באופן הבא - ככל שהמעגל יותר גדול, לוקאלית הוא יותר דומה לקו ישר, ולכן העקמומיות שלו קטנה.

לפיכך, עקמומיותו של מעגל צריכה להיות מוגדרת ביחס הפוך להיקפו של המעגל, וההגדרה הטבעית ביותר לעקמומיות של מעגל עם רדיוס R, אם כן, תהיה $\frac{1}{R}$.

איך נכליל זאת לעקומה כלשהי? בכל נקודה על העקומה, p, נקרב את העקומה על ידי מעגל נושק (אסקלטורי) C_p עם רדיוס r_p, והעקמומיות בנקודה תהיה $k(p) = \frac{1}{r_p}$.

שימו לב שהעקמומיות תלויה בנקודה (בניגוד לקו הישר והמעגל בהם העקמומיות קבועה).



הרדיוס r_p מכונה רדיוס העקמומיות ומרכז המעגל הנושק מכונה מרכז העקמומיות; נשוב אליהם בהמשך.

דרך ב': אפשר להגדיר עקמומיות כ"מהירות שבה העקומה משנה כיוון".

אם כך, אפשר במקום להסתכל על מהירות השינוי של כיוון העקומה, להסתכל על מהירות כיוון השינוי של הוקטורים המשיקים.

כדי להגדיר עקמומיות כך, יש בראש ובראשונה לשים לב שהמהירות לאורך כל העקומה שווה, אחרת אין משמעות למדידת מהירות השינוי. למשל, אם פרמטריזציה מסויימת של המעגל מתקדמת לאורך הקשת התחתונה במהירות מסוימת ולאורך הקשת העליונה במהירות כפולה, ברור שהשינוי בקשת העליונה יהיה יותר מהיר, למרות שגיאומטרית אין כל הבדל בין הקשתות! לכן, אם אנו ניגשים לעקמומיות בדרך זו, עלינו לעבוד עם הפרמטריזציה הטבעית, שהיא (כמו שאמרנו) פרמטריזציה במהירות יחידה.

אם כן, הוקטורים המשיקים הם $\gamma'(s)$, ולכן השינוי בהם ניתן על ידי נגזרתם, הלא היא $\gamma''(s)$. אנו רוצים להגדיר את העקמומיות כמהירות בשינוי, כלומר את הגודל של הוקטורים $\gamma''(s)$ ולכן נגדיר:

$$k(s) = \|\gamma''(s)\|$$

די אינטואיטיבי בסך הכל.

משוואות פרנה:

משוואות פרנה $(Frenet)$ מבטאות לנו את הקשר בין העקמומיות לבין הוקטורים המשיק והנורמל:

$$\begin{cases} \hat{T}'(s) = k(s)\hat{N}(s) \\ \hat{N}'(s) = -k(s)\hat{T}(s) \end{cases}$$

ואם נכתוב זאת בכתיב מטריציוני:

$$\begin{pmatrix} \hat{T}'(s) \\ \hat{N}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) \\ -k(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{T}(s) \\ \hat{N}(s) \end{pmatrix}$$

שימו לב שהפרמטריזציה טבעית. כמו כן, שימו לב שמטריצת המקדמים במשוואות היא אנטי־סימטרית.

ראינו שאם העקומה נתונה בפרמטריזציה טבעית, $k(s) = \|\gamma''(s)\|$. כאשר העקומה נתונה בפרמטריזציה כלשהי, $\gamma(t)$, העקמומיות נתונה על ידי הנוסחה:

$$k(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

כמו שהגדרנו בדרך א', רדיוס העקמומיות של עקומה נתון על ידי הנוסחה:

$$r(t) = \frac{1}{k(t)}$$

ומרכז העקמומיות נתון על ידי הנוסחה:

$$c(t) = \gamma(t) + r(t) \cdot \hat{N}(t)$$

זכרו שהרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה, התבוננו באיור למעלה והחכימו.

תרגיל:

תהי γ עקומה (חלקה ורגולרית) בעלת עקמומיות קבועה. תארו את γ.

<u>פתרון:</u>

אם העקמומיות היא $k = 0$, נקבל שמתקיים:

$$k(s) = \|\gamma''(s)\| = 0 \longrightarrow \gamma''(s) = 0$$

לכן $\gamma'(s) = c$ ולכן $\gamma(s) = ct + d$, וזהו קו ישר.

אם $k \neq 0$, נניח שמתקיים $k > 0$. נתבונן במרכזי העקמומיות:

$$c(s) = \gamma(s) + \frac{1}{k}\hat{N}(s)$$

נראה שהפונקציה c קבועה, על ידי כך שנראה שנגזרתה שווה לאפס:

$$c'(s) = \gamma'(s) + \frac{1}{k}\hat{N}'(s)$$

נזכור ש: $\hat{T}(s) = \gamma'(s)$, ולפי משוואות פרנה: $\frac{1}{k}\hat{N}'(s) = -\hat{T}(s)$, ולכן:

$$c'(s) = \hat{T}(s) - \hat{T}(s) = 0$$

ולכן $c(s) = a$ קבועה. אם כן:

$$\gamma(s) + \frac{1}{k}\hat{N}(s) = a$$

$$\gamma(s) - a = \frac{1}{k}\hat{N}(s)$$

נפעיל נורמה על שני האגפים ונקבל:

$$\|\gamma(s) - a\| = \left\|\frac{1}{k}\hat{N}(s)\right\| = \frac{1}{|k|}$$

מכיוון שהנורמל הוא נורמל יחידה. אם כן, $\gamma(s)$ מתארת אוסף נקודות שמרחקן מנקודה מסוימת שווה, ולכן $\gamma(s)$ מעגל (שימו לב מהו הרדיוס שלו).

במקרה בו $k < 0$ ניקח $c(s) = \gamma(s) - \frac{1}{k}\hat{N}(s)$ ונקבל את אותה התוצאה.

<u>מסקנה:</u>

רק לקו ישר ולקשת מעגל יש עקמומיות קבועה.

<u>משפט:</u>

כל איזומטריה של המישור $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ היא פונקציה מהצורה:

$$F(x) = Ax + b$$

כאשר A מטריצה אורתוגונאלית.

*אפשר להכליל זאת לכל $\mathbb{R}^n$.

ניזכר בכמה מהתכונות של מטריצות אורתוגונאליות:

1. $AA^t = A^tA = I$.
2. $\|Ax\| = \|x\|$.
3. באופן יותר כללי, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$.
4. $\det A = \pm 1$.

ויש עוד תכונות רבות ושימושיות.

<u>תרגיל:</u>

תהי $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ עקומה ותהי $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ איזומטריה.

נגדיר עקומה חדשה באופן הבא:

$$\tilde{\gamma}(t) = F(\gamma(t))$$

הביעו את עקמומיותה של $\tilde{\gamma}$ באמצעות העקמומיות של γ.

<u>פתרון:</u>

לפי המשפט, כל איזומטריה היא מהצורה $F(x) = Ax + b$ כאשר A אורתוגונאלית.

לכן:

$$\tilde{\gamma}(t) = F(\gamma(t)) = A\gamma(t) + b$$

ולכן:

$$\tilde{\gamma}'(t) = A\gamma'(t), \tilde{\gamma}''(t) = A\gamma''(t)$$

נסמן את העקמומיות של $\tilde{\gamma}(t)$ ב$-\tilde{k}(t)$, ונחשב לפי הנוסחה:

$$\tilde{k}(t) = \frac{\det(\tilde{\gamma}'(t), \tilde{\gamma}''(t))}{\|\tilde{\gamma}'(t)\|^3} = \frac{\det(A\gamma'(t), A\gamma''(t))}{\|A\gamma'(t)\|^3} = \frac{\det\left(A \cdot (\gamma'(t).\gamma''(t))\right)}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

השינוי במכנה במעבר האחרון נובע מכך ש$-A$ שומרת נורמה (תכונה 3).

כעת, דטרמיננטה של מכפלה היא מכפלת הדטרמיננטות, ולכן:

$$= \frac{\det A \cdot \det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3} = \pm\frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3} = \pm k(t)$$

כאשר k היא העקמומיות של γ; המעבר הראשון נובע מתכונה 4 שציינו לעיל.

<u>מסקנה:</u>

איזמוטריה שומרת על העקמומיות בערך מוחלט.

<u>שאלה:</u>

בהינתן פונקציה $k(s)$, האם היא מתארת עקמומיות של עקומה כלשהי?

ננסה לענות על השאלה, לפחות חלקית, בעזרת התרגיל הבא.

<u>תרגיל:</u>

תהי $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה חלקה, ותהי $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ העקומה הבאה:

$$\gamma(s) = \left(\int_0^s \cos(\phi(u))du, \int_0^s \sin(\phi(u))du\right)$$

א. הראו שהפרמטר s הוא פרמטר טבעי.

<u>פתרון:</u>

נגזור את γ ונחשב את הנורמה:

$$\gamma'(s) = (\cos(\phi(s)), \sin(\phi(s)))$$

ולכן:

$$\|\gamma'(s)\| = \sqrt{\cos^2(\phi(s)) + \sin^2(\phi(s))} = 1$$

והפרמטריזציה אכן טבעית.

ב. חשבו את העקמומיות של γ.

<u>פתרון:</u>

מכיוון שהפרמטריזציה טבעית, נוכל להשתמש בנוסחה: $k(s) = \|\gamma''(s)\|$.

אם כן, $\gamma''(s) = (-\sin(\phi(s)) \cdot \phi'(s), \cos(\phi(s)) \cdot \phi'(s))$ ולכן:

$$k(s) = \sqrt{(-\sin(\phi(s)) \cdot \phi'(s))^2 + (\cos(\phi(s)) \cdot \phi'(s))^2} = \phi'(s)$$

חשבו למה אפשר להיפטר מהערך המוחלט.

מכאן, אנו רואים שאם הפונקציה $k(s)$ היא נגזרת של פונקציה חלקה, היא עקמומיות של עקומה כלשהי (העקומה שבתרגיל).

למשל, נמצא עקומה שעקמומיותה היא $k(s) = s$ לכל s.

מהתרגיל, אנו מחפשים $\phi(s)$ כך ש: $\phi'(s) = k(s) = s$, ולכן נוכל לבחור: $\phi(s) = \frac{1}{2}s^2$ והעקומה הדרושה תהיה γ כמו בתרגיל.

<u>תרגילון:</u>

מצאו את העקמומיות של עקומה הנתונה על ידי גרף הפונקציה: $y = f(x)$.

<u>פתרון:</u>

פרמטריזציה של העקומה היא:

$$\gamma(t) = (t, f(t))$$

לכן: $\gamma'(s) = (1, f'(t)), \gamma''(t) = (0, f''(t))$ ולפי הנוסחה:

$$k(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3} = \ldots = \frac{f''(t)}{\left(1 + (f'(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

<u>תרגיל:</u>

איך משפיע היפוך כיוון התנועה על העקמומיות של עקומה $\gamma : [0, T] \to \mathbb{R}^2$?

<u>פתרון:</u>

נגדיר את העקומה בכיוון ההפוך:

$$\delta(s) = \gamma(T - s)$$

לפי כלל השרשרת:

$$\delta'(s) = (T - s)' \cdot \gamma'(T - s) = -\gamma'$$

$$\delta''(s) = \gamma''$$

ולכן לפי הנוסחה:

$$k_\delta = \frac{\det(\delta'(t), \delta''(t))}{\|\delta'(t)\|^3} = \frac{\det(-\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|-\gamma'(t)\|^3} = -\frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3} = -k_\gamma$$

נזכור שפעולת כפל שורה/עמודה בקבוע מכפילה את הדטרמיננטה בקבוע (במקרה שלנו, -1).

<u>מסקנה:</u>

היפוך כיוון העקומה הופך את סימן העקמומיות.

*אנו יודעים שאפשר להציג עקומות גם בצורה סתומה: $F(x,y)=0$, ולא רק על ידי פרמטריזציה.

כאשר עקומה נתונה בצורה סתומה, אפשר לחשב את העקמומיות על ידי הנוסחה:

$$|k|=\left|\nabla\cdot\frac{\nabla F(x,y)}{\|\nabla F(x,y)\|}\right|$$

כלומר דיברגנץ של הגרדיאנט המנורמל. עוד מעט נראה נוסחה נוספת.

שימו לב שאנו יכולים לחשב רק את העקמומיות בערך מוחלט ולא את העקמומיות ממש; זאת מכיוון שבצורה סתומה, בניגוד לפרמטריזציה, אין לנו ידע על כיוון ההתקדמות של העקומה (אין כזה), וראינו שמה שקובע את סימן העקמומיות הוא כיוון ההתקדמות של העקומה.

אבולוט:

תהי γ עקומה מישורית חלקה ורגולרית. נסמן:

$$E(s)=\gamma(s)+\frac{1}{k(s)}\hat{N}(s)$$

זהו מרכז העקמומיות בנקודה s. הפונקציה $E:[0,T]\to\mathbb{R}^2$ נקראת האבולוט של γ, עקומה העוברת דרך מרכזי העקמומיות של γ.

<u>תרגיל:</u>

מצאו את האבולוט של העקומה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

<u>פתרון:</u>

העקומה שלנו היא אליפסה; פרמטריזציה שלה היא:

$$\gamma(t)=(a\cos t,b\sin t)$$

נחשב את מרכזי העקמומיות לפי הנוסחה לפרמטריזציה כללית.

מתקיים:

$$\gamma'(t) = (-a\sin t, b\cos t), \gamma''(t) = (-a\cos t, -b\sin t)$$

לכן:

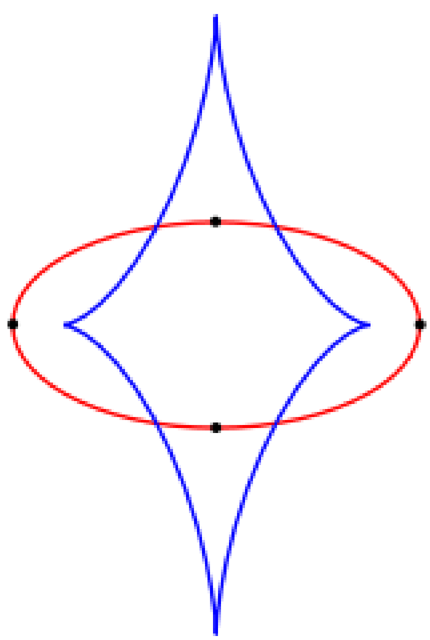
$$k(t) = \frac{\det(\gamma'(t),\gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{\begin{vmatrix} -a\sin t & -a\cos t \\ b\cos t & -b\sin t \end{vmatrix}}{\left(\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\right)^3} = \frac{ab}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}$$

כמו כן,

$$\hat{N}(t) = R_{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{(-a\sin t, b\cos t)}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}} = \frac{(-b\cos t, -a\sin t)}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}$$

ובסה"כ:

$$E(t) = \gamma(t) + \frac{1}{k(t)}\hat{N}(t) = (a\cos t, b\sin t) + \frac{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}{ab} \cdot (-b\cos t, -a\sin t)$$



האבולוט של אליפסה הוא אסטרואידה כזו.

קודקודים:

למרות שהעקומה צריכה להיות רגולרית כדי שנוכל לחשב את האבולוט שלה, האבולוט עצמו לא חייב להיות עקומה רגולרית.

מתי, אם כן, האבולוט לא רגולרי? נגזור ונשווה לאפס:

$$E'(s) = \gamma'(s) + \frac{-k'(s)}{k^2(s)}\hat{N}(s) + \frac{1}{k(s)}\hat{N}'(s)$$

נזכור ש: $\gamma'(s) = \hat{T}(s)$, ולפי משוואות פרנה: $\frac{1}{k}\hat{N}'(s) = -\hat{T}(s)$, ולכן:

$$E'(s) = \hat{T}(s) - \frac{k'(s)}{k^2(s)}\hat{N}(s) - \hat{T}(s) = -\frac{k'(s)}{k^2(s)}\hat{N}(s)$$

ולכן $E'(s) = 0$ (כלומר E לא רגולרית) כאשר $k'(s) = 0$.

נקודה כזו, שבה $k'(s) = 0$, נקראת קודקוד.

<u>משפט:</u> (ארבעת הקודקודים)

לכל עקומה סגורה ופשוטה יש לפחות ארבעה קודקודים.

*$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ נקראת סגורה אם $\gamma(a) = \gamma(b)$ ופשוטה אם היא חח"ע; עקומה סגורה ופשוטה היא סגורה וחח"ע למעט הקצוות.

אינוולוט:

בהינתן עקומה γ, האינוולוט של γ הוא העקומה I שהעקומה γ היא האבולוט שלה.

I נתונה על ידי הנוסחה:

$$I(s) = \gamma(s) - s(t) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

עקמומיות בצורה סתומה:

ראינו שכאשר העקומה נתונה בצורה סתומה, $F(x,y) = 0$, אפשר לחשב את עקמומיותה על ידי הנוסחה:

$$|k| = \left| \nabla \cdot \frac{\nabla F(x,y)}{\|\nabla F(x,y)\|} \right|$$

אפשר לחשב את העקמומיות בצורה נוספת, על ידי נוסחת בייטמן $(Bateman)$:

$$|k| = \left|\frac{D_B(F)}{\|\nabla F(x,y)\|^3}\right| = \frac{\left|F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2\right|}{\left(\sqrt{F_x^2 + F_y^2}\right)^3}$$

האופרטור D_B נקרא אופרטור בייטמן.

<u>תרגיל:</u>

מצאו את העקמומיות המקסימלית של הפרבולה $y = x^2$.

<u>פתרון:</u>

אפשר להגדיר פרמטריזציה $\gamma(t) = (t, t^2)$, ולחשב לפי הנוסחה $k(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3}$.
נשתמש בנוסחת בייטמן. הפונקציה F היא: $F(x,y) = y - x^2 = 0$. כעת:

$$F_x = -2x, F_y = 1$$

$$F_{xx} = -2, F_{xy} = 0, F_{yy} = 0$$

ולכן:

$$|k| = \frac{\left|F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2\right|}{\left(\sqrt{F_x^2 + F_y^2}\right)^3} = \frac{|-2|}{\left(\sqrt{4x^2+1}\right)^3} = \frac{2}{(4x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

וקל לראות שהעקמומיות המקסימלית מתקבלת כאשר $x = 0$ (למתקדמים: גזרו והשוו לאפס), וערכה הוא 2.

עקומות מרחביות:

עד עכשיו דיברנו בעיקר על עקומות מישוריות, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$. עקומה מרחבית היא עקומה במרחב, כלומר:

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$$

נרצה להכליל את מה שלמדנו על עקומות מישוריות לעקומות מרחביות.

משיק היחידה יהיה כרגיל: $\hat{T}(s) = \gamma'(s)$.

וקטור הנורמל, לעומת זאת, מעט שונה:

$$\hat{N}(t) = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}$$

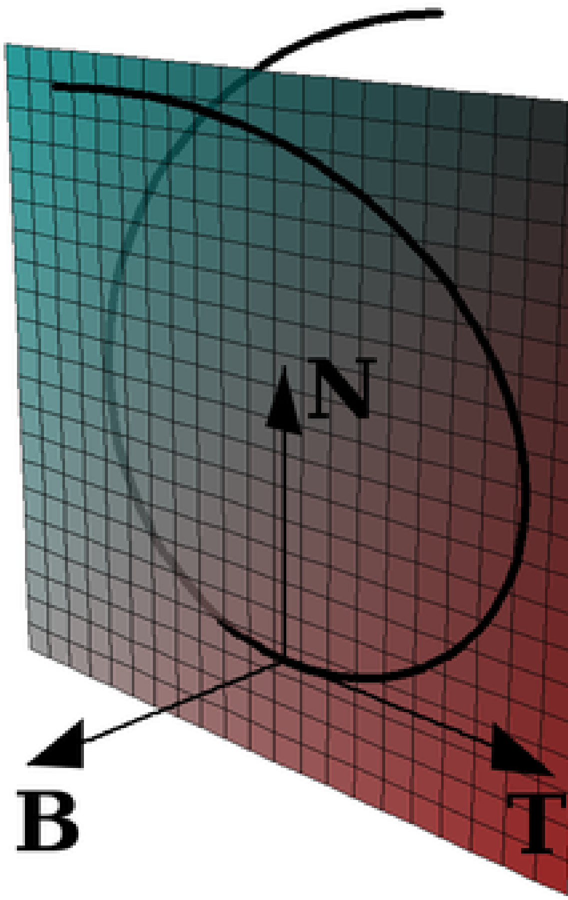
כדי לפרוש את המרחב אנו צריכים שלושה וקטורים, ולכן ניקח וקטור שמאונך לשני הוקטורים המשיק והנורמל שלנו.

הוקטור הבי־נורמל הוא הוקטור:

$$\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N} = \frac{\gamma' \times \gamma''}{\|\gamma''\|}$$

מהגדרת המכפלה הוקטורית, הוקטור הבי־נורמל מאונך למישור הנפרש על ידי המשיק והנורמל, ויוצר איתם בסיס עם אוריינטציה חיובית:

$$\det(\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}) > 0$$



בפרמטריזציה טבעית, העקמומיות היא: $k(s) = \|\gamma''(s)\|$.

בפרמטריזציה רגילה העקמומיות היא:

$$k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

במרחב אנו יכולים לשאול את עצמנו שאלה נוספת. חוץ מלדעת עד כמה העקומה אכן עקומה, אפשר גם לשאול: "עד כמה העקומה מישורית"? כלומר, עד כמה העקומה נמצאת במישור אחד ולא מתפתלת?

למדד המודד זאת נקרא פיתול $(torsion)$. נסמנו ב$-\tau$.

כאשר הפרמטריזציה טבעית, מתקיים: $\tau = \frac{\det(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{k^2}$.

בפרמטריזציה כללית, הפיתול נתון על ידי הנוסחה:

$$\tau = \frac{\det(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{\|\gamma' \times \gamma''\|}$$

משוואות פרנה במקרה המרחבי נקראות גם משוואות פרנה־סרה $(Frenet - Serret)$, והן נתונות על ידי:

$$\begin{cases} \hat{T}'(s) = k(s)\hat{N}(s) \\ \hat{N}'(s) = -k(s)\hat{T}(s) + \tau(s)\hat{B}(s) \\ \hat{B}'(s) = -\tau(s)\hat{N}(s) \end{cases}$$

ובכתיב מטריציוני:

$$\begin{pmatrix} \hat{T}' \\ \hat{N}' \\ \hat{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{T} \\ \hat{N} \\ \hat{B} \end{pmatrix}$$

שימו לב שהפרמטריזציה טבעית. שימו לב גם לכך שמטריצת המקדמים היא אנטי־סימטרית.

<u>תרגיל:</u>

הוכיחו שאם $\tau(s) = 0$, העקומה נמצאת על מישור אחד.

במילים אחרות, נראה שהפיתול אכן מצביע על מידת "מישוריותה" של העקומה.

<u>פתרון:</u>

מכיוון ש־$\tau(s) = 0$, לפי פרנה־סרה נקבל:

$$\hat{B}'(s) = 0$$

ולכן וקטור הבי־נורמל קבוע, $\hat{B}(s) = c$ (כי נגזרתו מתאפסת).

אנו רוצים להראות שהעקומה נמצאת כולה במישור אחד. איך נעשה זאת?

מכיוון שהפרמטריזציה טבעית, יש לנו וקטור התחלתי, $\gamma(0)$.

לכל s אפשר להתבונן בוקטור $\gamma(s)$. אנו רוצים שהוקטורים $\gamma(s)$ (אם נתבונן עליהם כעל נקודות) לכל s יהיו באותו מישור.

אנו יודעים שוקטור הבי־נורמל הוא קבוע. נתבונן בוקטור $\gamma(s) - \gamma(0)$ לכל s, שנמצא במישור שבו נמצאים $\gamma(0), \gamma(s)$ ונראה שוקטור הבי־נורמל מאונך לו.

במצב כזה, γ נמצאת כולה במישור שהוקטור הבי־נורמל מאונך לו; מישור המקביל למישור הנפרש על ידי המשיק והנורמל.

כלומר, נראה ש: $P(s) = \left\langle \gamma(s) - \gamma(0), \hat{B} \right\rangle = 0$ לכל s.

ראשית, נראה שהפונקציה P קבועה, על ידי כך שנראה שנגזרתה מתאפסת:

$$P'(s) = \left\langle (\gamma(s) - \gamma(0))', \hat{B} \right\rangle + \left\langle \gamma(s) - \gamma(0), \hat{B}' \right\rangle =$$

אנו יודעים ש: $\hat{B}' = 0$ ולכן $\left\langle \gamma(s) - \gamma(0), \hat{B}' \right\rangle = 0$.

מצד שני, $(\gamma(s) - \gamma(0))' = \gamma'(s) = \hat{T}(s)$ ולכן:

$$P'(s) = \left\langle (\gamma(s) - \gamma(0))', \hat{B} \right\rangle = \left\langle \hat{T}, \hat{B} \right\rangle = 0$$

מכיוון שהוקטור הבי נורמל והוקטור המשיק מאונכים זה לזה.

אם כן, $P'(s) = 0$ ולכן $P(s) = a$ קבועה.

מצד שני, $P(0) = \left\langle \gamma(0) - \gamma(0), \hat{B} \right\rangle = \left\langle 0, \hat{B} \right\rangle = 0$ ולכן בסך הכל $P(s) = 0$.

לכן הוקטור הבי־נורמל מאונך לוקטור $\gamma(s) - \gamma(0)$ לכל s כמו שביקשנו.

נסביר קצת יותר. משוואת מישור היא מהצורה:

$$Ax + By + Cz = D$$

כאשר $N = (A, B, C)$ הנורמל למישור. אם נסמן $\vec{x} = (x, y, z)$, נוכל להציג משוואת מישור באופן הבא:

$$\langle \vec{x}, N \rangle = D$$

במקרה שלנו, $P(s) = \left\langle \gamma(s) - \gamma(0), \hat{B} \right\rangle = 0$, ולפי הליניאריות של מכפלה סקלרית נקבל:

$$\left\langle \gamma(s), \hat{B} \right\rangle = \left\langle \gamma(0), \hat{B} \right\rangle$$

ואם נסמן: $\vec{x} = \gamma(s), N = \hat{B}$ ו-$D = \left\langle \gamma(0), \hat{B} \right\rangle$ אפשר לראות שזו אכן משוואת מישור!

*איך משפיעה איזומטריה על העקמומיות ועל הפיתול?

בדומה לאיזומטריות של המישור, גם איזומטריות של המרחב שומרות על הערך המוחלט של העקמומיות ושל הפיתול (כלומר, משאירות אותם על כנם או מחליפות את הסימן). ההוכחה פשוטה, בדומה למה שראינו על עקומות מישוריות.

משטחים:

מפה רגולרית היא מפה חלקה $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ כאשר $U \subseteq \mathbb{R}^2$ פתוחה שדרגת היעקוביאן שלה מקסימלית בכל נקודה (כלומר, שווה ל-2).

משטח הוא תת קבוצה $M \subset \mathbb{R}^3$, כך שלכל $x \in M$ קיימת מפה $\varphi_x : U_x \to M$ ש-x נמצא בטווח שלה (היזכרו באינפי 4).

אוסף מפות כאלו $\{\varphi_x\}$ נקרא אטלס.

<u>תרגיל:</u>

מצאו אטלס עבור הגליל:

$$M = \{)x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$$

<u>פתרון:</u>

פרמטריזציה של הגליל היא:

$$\varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

כאשר $(u,v) \in [0,2\pi] \times \mathbb{R}$.

מכיוון שתחומה של מפה הוא קבוצה פתוחה, ניקח את שתי ההעתקות:

$$\varphi_1 : (0,2\pi) \to M$$
$$\varphi_1(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$$
$$\varphi_2 : (0,2\pi) \to M$$
$$\varphi_2(u,v) = (\cos(u+\pi), \sin(u+\pi), v)$$

ההעתקה הראשונה מכסה את כל הגליל למעט פס לכל אורכו; ההעתקה השנייה מכסה את הפס הזה, וכך אנו מכסים את כל הגליל.

המישור המשיק:

נסמן ב$-T_p(M)$ את המישור המשיק למשטח M בנקודה p.

המישור המשיק הוא אוסף כל הוקטורים המשיקים לעקומות העוברות דרך p ונמצאות כולן על M.

אפשר לכתוב:

$$T_p(M) = \{\gamma'(0) | \gamma : [-a,a] \to M, \gamma(0) = p\}$$

$T_p(M) \subseteq \mathbb{R}^3$, אך מכיוון שזהו מישור ברור ש: $T_p(M) \cong \mathbb{R}^2$.

אם המפה רגולרית, אז:

$$T_p(M) = span\{\varphi_u(p), \varphi_v(p)\}$$

אם כן, לכל וקטור $w \in T_p(M)$ יש הצגה בקואורדינטות לפי הבסיס $\{\varphi_u(p), \varphi_v(p)\}$:

$$w = w^1\varphi_u(p) + w^2\varphi_v(p)$$

ואם כן, נוכל להגדיר איזומורפיזם $\Phi : \mathbb{R}^2 \to T_p(M)$ על ידי:

$$\Phi((w^1,w^2)) = w^1\varphi_u(p) + w^2\varphi_v(p) = (\varphi_u(p), \varphi_v(p)) \cdot \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix} = J_\varphi(p) \cdot \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}$$

זו היעקוביאן; מכיוון שהיעקוביאן מוגדרת כפונקציה $J_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ והתחום והטווח אצלנו מעט שונים, להעתקה זו אנו קוראים הדיפרנציאל, ומסמנים אותה ב$-d_q\varphi$, כאשר q היא מקור של p.

<u>משפט:</u>

לכל עקומה מישורית γ מתקיים:

$$d_q\varphi(\gamma'(0)) = (\varphi \circ \gamma)'(0)$$

<u>תרגיל:</u>

תהי $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ פונקציה המוגדרת על ידי:

$$f(x, y) = (x + \sin y, \ln(x^2 + 1))$$

חשבו את $d_p f(v)$ לכל v, כאשר $p = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

<u>פתרון:</u>

דרך א': נפתור כמו באינפי 3. נחשב את היעקוביאן:

$$J_f = \begin{pmatrix} 1 & \cos y \\ \frac{2x}{x^2+1} & 0 \end{pmatrix}$$

ובנקודה שלנו:

$$J_f(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$d_p f(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^1 \end{pmatrix}$$

כאשר $v=\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$.

דרך ב': נשתמש במשפט שלנו.

אנו רוצים עקומה $\gamma(t)$ המקיימת:

1. $\gamma(0)=p$.
2. $\gamma'(0)=v$.

אם כן, הכי פשוט לקחת את העקומה:

$$\gamma(t)=tv+p=(tv^1+1,tv^2+\frac{\pi}{2})$$

כעת,

$$(f\circ\gamma)(t)=f(tv^1+1,tv^2+\frac{\pi}{2})=\left(1+tv^1+\sin\left(\frac{\pi}{2}+tv^2\right),\ln\left(2+2tv^1+t^2{v^1}^2\right)\right)$$

ולכן:

$$(f\circ\gamma)'(t)=\left(v^1+v^2\cos\left(\frac{\pi}{2}+tv^2\right),\ln\left(\frac{2v^1+2t{v^1}^2}{2+2tv^1+t^2{v^1}^2}\right)\right)$$

ואם נציב $t=0$ נקבל: $(f\circ\gamma)'(0)=(v^1,v^1)$.

לפי המשפט:

$$d_pf(v)=d_pf(\gamma'(0))=(f\circ\gamma)'(0)=\begin{pmatrix} v^1 \\ v^1 \end{pmatrix}$$

ואכן קיבלנו את אותה תוצאה.

התבנית היסודית הראשונה:

נגדיר תבנית בילינארית $I:T_p(M)\times T_p(M)\to\mathbb{R}$ על ידי:

$$I(u_1,u_2)=\langle u_1,u_2\rangle$$

אם נסתכל על הוקטורים u_1, u_2 כצירופים ליניאריים של φ_u, φ_v:

$$u_1 = a^1\varphi_u + a^2\varphi_v$$
$$u_2 = b^1\varphi_u + b^2\varphi_v$$

נקבל (מליניאריות המכפלה הפנימית):

$$I(u_1, u_2) = \langle u_1, u_2 \rangle = a^1b^1g_{11} + a^1b^2g_{12} + a^2b^1g_{21} + a^2b^2g_{22}$$

כאשר: $g_{11} = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle, g_{12} = g_{21} = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, g_{22} = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$.

אם כן, אפשר לומר שהתבנית I מושרית מהמטריצה:

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

כלומר: $I(a, b) = b^tGa$.

*בליניארית 2 קראנו למטריצה הזו מטריצת גראם.

G נקראת המטריקה (הרימנית), g_{ij} נקראים מקדמי המטריקה.

מה אפשר לעשות עם התבנית היסודית הראשונה? לא מעט דברים, כפי שנראה בהמשך.