תרגול 12

16 אוגוסט, 2016

רגרסיה לינארית

תרגיל:

x	$x_1 = 2.2$	$x_2 = 2.5$	$x_3 = 3.5$	$x_4 = 4$	$x_5 = 5$	$x_6 = 7$	$x_7 = 10$	$x_8 = 13$
y	1.5	10	4	4.5	3	3	2.5	2.5

ידוע שהפונקציה מתנהגת כמו $F(x) = \frac{1}{d_1 x + d_0}$

מצאו את הפרמטרים בעזרת רגרסיה לינארית.

$$ax_i + b = y_i$$

פתרון:

נגדיר –

$$g(x) = \frac{1}{F(x)}$$

$$d_1 x + d_0 = \frac{1}{F(x)} = g(x)$$

$$d_1 x_i + d_0 = \frac{1}{F(x_i)} = y_i$$

נכתוב בצורה מטריציונית –

$$\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_8 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} d_1 \\ d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_8 \end{bmatrix}$$

נכפיל ב - A^t משמאל –

$$\begin{bmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & 8 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} d_1 \\ d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_i y_i \\ \sum y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \frac{x_i}{F(x_i)} \\ \sum \frac{1}{F(x_i)} \end{bmatrix}$$

נציב ונקבל –

$$\begin{bmatrix} 382.34 & 47. \\ 47.2 & 8 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} d_1 \\ d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.36 \\ 2.11 \end{bmatrix}$$

נקבל ש –

$$d_0 = 0.0963\,, d_1 = 0.0283$$

ולכן בסה"כ –

$$F(x)=\frac{1}{0.0283x+0.0963}$$

$\blacksquare$

תרגיל:

מצא a,b כך ש - $y_i \approx ae^{bx_i}$ עבור הנתונים הבאים:

x	0	0.5	1	1.5	2
y	1.1	1.4	1.3	2.3	3

א) מצא את a,b באמצעות רגרסיה לינארית.

ב) $s=\sum_{i=1}^{n}(y_i-ae^{bx_i})^2$ הוכיחו ש- s מינימלי שזה אם ורק אם –

$$\begin{cases} a\sum x_i e^{2bx_i}=\sum x_i y_i e^{bx_i} \\ a\sum e^{2bx_i}=\sum y_i e^{bx_i} \end{cases}$$

פתרון:

א) נפעיל ln על הנוסחה הנתונה –

$$y_i=ae^{bx_i}$$

ונקבל –

$$\ln(y_i)=\ln(ae^{bx_i})=\ln(a)+\ln(e^{bx_i})=\ln(a)+bx_i$$

נסמן בסימונים שונים –

$$\widehat{y_i}=\hat{a}+bx_i$$

זוז כבר רגרסיה לינארית. נכתוב בכתיב מטריציוני –

$$\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_5 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{y_1} \\ \vdots \\ \widehat{y_5} \end{bmatrix}$$

ואכן נכפיל ב - A^t משמאל (רגורליזציה) –

$$=>\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b \\ \hat{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \widehat{y_i} x_i \\ \sum \widehat{y_i} \end{pmatrix}$$

$$=> a = 1.1 \,, b = 0.5$$

ב) נסתכל על s:

$$s = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ae^{bx_i})^2$$

נגזור לפי a, b ונשווה ל-0:

$$\frac{\partial s}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2(ae^{bx_i} - y_i) * e^{bx_i} = 0 \,, \frac{\partial s}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2(ae^{bx_i} - y_i) * ax_i e^{bx_i} = 0$$

(אפשר לחלק ב – 2 בשתי המשוואות ולחלק ב – a במשוואה מימין) לכן נקבל –

$$=> \begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} e^{2bx_i} - \sum_{i=1}^{n} y_i e^{bx_i} = 0 \\ a\sum_{i=1}^{n} ae^{2bx_i} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i e^{bx_i} \end{cases}$$

■

תרגול 12

16 אוגוסט, 2016

תהליך הרגרסיה הלינארית

תהליך מסורבל מאוד, בדרך כלל ה - $C.N$ של המטריצה (A^TA) המתקבלת גבוה **מאוד**. על מנת לשפר את יעילות שיטת הריבועים המינימליים נשתמש בפונקציות (פולינומים) אורתוגונליים באופן הבא:

שיפור ע"י –

$$p(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x)$$

$$s = \sum_{i=1}^{n} [p(x_i) - y_i]^2$$

... ...

$$a_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \varphi_j(x)}{\sum_{i=1}^{n} \left(\varphi_j(x)\right)^2}$$

יהי φ_i סדרת פולינומים מדרגה i, φ_i יקראו פולינומים אורתוגונליים, אם:

$$\sum_{k=0}^{n} \varphi_i(x_k) * \varphi_j(x_k) = 0$$

$$\boxed{p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x)}$$

זה במקרה הבדיד.

מקרה בדיד:

תרגיל:

מצא פולינום ממעלה 2 שהוא צ"ל של פ"א (פולינומים אורתוגונליים) העובר דרך הנק' הבאות:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1.2	2.1	-3.4	2.5	4.6	3.4	4.2	2.6

כאשר הפ"א הינם -

$$\varphi_0 = 1 \,, \varphi_1 = x + a \,, \varphi_2 = x^2 + bx + c$$

פתרון:

נחשב תחילה את a,b,c לפי תנאי של פ"א:

$$\sum_{i=1}^{8} \varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) = 0$$

$$=> \sum_{i=1}^{8} a + \sum_{i=1}^{8} x_i = 0 => a = -4.5$$

כעת –

$$\sum_{i=1}^{8} \varphi_0(x_i)\varphi_2(x_i) = 0 => \sum_{i=1}^{8} x_i^2 + bx_i + c = 0$$

$$\sum_{i=1}^{8} \varphi_1(x_i)\varphi_2(x_i) = 0 => \sum_{i=1}^{8} (x_i - 4.5)(x_i^2 + bx_i + c) = 0$$

$$=> b = -9\,, c = 15$$

ולכן קיבלנו –

$$\varphi_0 = 1\,, \varphi_1 = x - 4.5\,, \varphi_2 = x^2 - 9x + 15$$

לכן נחשב את הפולינום הדרוש –

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{8} y_i \varphi_0(x)}{\sum_{i=1}^{8} \left(\varphi_0(x)\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{8} y_i}{\sum_{i=1}^{8} 1} = 2.175$$

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^{8} y_i (x_i - 4.5)}{\sum_{i=1}^{8} (x_i - 4.5)^2} = 0.502$$

$$a_2 = \frac{\sum_{i=1}^{8} y_i \varphi_2(x)}{\sum_{i=1}^{8} \left(\varphi_2(x)\right)^2} = \cdots = -0.017$$

ובסה"כ נקבל –

$$p(x) = 2.175 * 1 + 0.502 * (x - 4.5) - 0.017 * (x^2 - 9x + 15)$$

■

תרגול 12

16 אוגוסט, 2016

מקרה רציף:

$$<\varphi_i,\varphi_j>=\int_a^b \varphi_i*\varphi_j*\underbrace{w(x)}_{\text{פונקצית משקל}}\,dx$$

$$a_j=\frac{\int_a^b \varphi_j(x)*f(x)*w(x)dx}{\int_a^b \varphi_j^2(x)*w(x)dx}$$

דוגמה:

1) פולינום לז'נדר באינטרוול $[-1,1]$ עם פו' משקל $w\equiv 1$, כלומר –

$$\int_{a=-1}^{b=1}\varphi_j^2(x)w(x)dx=_{\text{ניתן לפתח לנוסחה פשוטה}}$$

פולינומים ראשונים:

$$P_0=1\,,P_1=x\,,P_2=\frac{3x^2-1}{2}\,,P_3=\frac{5x^3-3x}{2}$$

נוסחה רקורסיבית לזה –

$$P_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{n+1}xP_n(x)-\frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$$

2) פולינום צ'ביצ'ב – באינטרוול $[-1,1]$:

$$<T_n,T_m>=\begin{cases}\pi & n=m=0\\ \frac{\pi}{2} & n=m\neq 0\\ 0 & n\neq m\end{cases}$$

פונקציית משקל –

$$w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

פולינומים –

$$T_0=1\,,T_1=x\,,T_2=2x^2-1\,,T_3=4x^3-3x$$

באופן כללי –

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$$

תרגול 12

הערה:

כל קטע סופי $[a,b]$ ניתן להעביר לקטע $[-1,1]$ ע"י:

$$t-1=\frac{2}{b-a}*[x-b]$$

$$t=\frac{2}{b-a}[x-b]+1$$

תרגיל:

מצאו קירוב $p(x)$ פולינום מסדר 2 לפו' $F(x)=1-x^4$ בקטע $[-1,1]$ באמצעות פולינום צ'ביצ'ב.

פתרון:

נרצה למצוא –

$$P(x)=a_0T_0(x)+a_1T_1(x)+a_2T_2(x)$$

לכן –

$$a_0=\frac{\int_{-1}^{1}(1-x^4)*T_0(x)*\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx}{<T_0,T_0>}=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-x^4)*1*\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

נעשה הצבה $x=\sin(t)$ ונקבל ...... –

$$a_0=\frac{5}{8}$$

$$a_1=\frac{\int_{-1}^{1}(1-x^4)*x*\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx}{<T_1,T_1>}=0$$

כי –

$$\underbrace{1-x^4}_{\text{זוגית}}\ ,\ \underbrace{x}_{\text{אי-זוגית}}\ ,\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{\text{זוגית}}\Rightarrow \text{זוגית}$$

$$a_2=\frac{2}{\pi}*\underbrace{I}_{\text{האינטגרל}}=\cdots=-\frac{1}{2}$$

בסה"כ נקבל כי –

$$P(x)=\frac{5}{8}T_0(x)+0*T_1(x)-\frac{1}{2}*T_2(x)=\frac{5}{8}-\frac{1}{2}(2x^2-1)$$

■

תרגול 12

16 אוגוסט, 2016

תרגיל:

מצא פולינום ממעלה 2 ($P(x)$) שהוא קירוב הטוב ביותר מבחינת ריבועים מינימליים.

כלומר נרצה ש –

$$\int_0^2 [f(x) - P(x)]^2 dx$$

יהיה מינימלי, כאשר $f(x) = \sqrt{2x+3}$.

פתרון:

תחיל נחליף את הקטע מ - $[0,2]$ ל - $[-1,1]$:

$$t = x - 1 \,, f(x) = \sqrt{2x+3}$$

$$=> f(t) = \sqrt{2t+5}$$

כעת –

$$P(t) = a_0 P_0(t) + a_1 P_1(t) + a_2 P_2(t)$$

נחשב את המקדמים כמו בתרגילים קודמים ונקבל –

$$a_0 = 2.2204 \,, a_1 = 0.45 \,, a_2 = 0.0139$$

לכן –

$$P(t) = 2.2204 * 1 + 0.45 * t + 0.0139 * \frac{3t^2 - 1}{2}$$

$$t = x - 1$$

$$=> P(x) = 2.2204 + 0.45(x-1) + 0.0139 * \left(\frac{3(x-1)^2 - 1}{2}\right)$$