

תרגיל בית 9 בשדות ותורת גלואה 88-311 סמסטר א' תשע"ט

שאלה 1 (חימום). יהי $m|n$. הוכיחו $x^m - 1 | x^n - 1$.

תרגיל 2. מצאו באילו שדות סופיים \mathbb{F}_q יש איבר x המקיים $x^4 = -1$. רמז: זו שאלה על החבורה הכפלית.

תרגיל 3. הפריכו שאם $F = \mathbb{F}_p[\alpha]$ שדה סופי, אז תמיד $F^* = \langle \alpha \rangle$. רמז: כנראה מספיק לקחת $p = 2$. מי הם שאר השורשים של הפולינום המינימלי של α ?

תרגיל 4. בנו את השדה \mathbb{F}_{32} בלי לעבוד יותר מדי קשה: בכיתה מצאנו פולינומים אי פריקים f_1, f_2, f_3 ממעלה 1 או 2. הגדירו $g = f_1^2 f_2 f_3 + 1$.

שאלה 5. רמז: המספרים 7 ו-5779 ראשוניים.

א. הוכיחו שקיים $x \in \mathbb{F}_q$ המקיים

$$\sum_{i=0}^{5778} x^i = 1 + x + \dots + x^{5778} = 0$$

אם ורק אם $q \equiv 0 \pmod{5779}$ או $q \equiv 1 \pmod{5779}$. רמז: קודם מצאו שורש של הפולינום $x^{5779} - 1$.

ב. (באופן דומה) מצאו עבור אילו מספרים טבעיים n השדה \mathbb{F}_{5^n} מכיל איבר x המקיים

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

שאלה 6. יהי $n > 1$ אי זוגי. הוכיחו שהפולינום הציקלוטומי מקיים $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$.

שאלה 7. כתבו נוסחה קצרה לפולינום הציקלוטומי $\Phi_{2^n}(x)$.

שאלה 8 (רשות). מצאו את כל הפולינומים הציקלוטומיים $\Phi_n(x)$ כך ש- $\deg \Phi_n(x) = 4$.

שאלה 9 (רשות). כתבו תוכנה שבהינתן n טבעי מחשבת את הפולינום הציקלוטומי Φ_n . הדפיסו את $\Phi_1, \dots, \Phi_{100}$ ושערו השערה לגבי מקדמים של פולינומים ציקלוטומיים. חשבו את Φ_n עבור $n > 100$ ובדקו את השערתכם.

בהצלחה!