

אלגברה מופשטת - תרגיל 3

שאלה 1

- א. מצאו את שתי הספרות האחרונות של 5353^{202} .
ב. מצאו את $5773^{862} + 2013 \pmod{80}$.

שאלה 2

- א. תהי D_5 החבורה הדיהדרלית מסדר 10. תארו את כל תתי-החבורות הלא טריוויאליות של D_5 . הוכיחו כי כולן חבורות אבליות.
ב. מצאו תתי-חבורה נורמלית לא טריוויאלית של D_5 . האם יש יותר מאחת?

שאלה 3

- יהיו $H, K \leq G$ תתי-חבורות. הגדרנו מכפלת תתי-חבורות $HK = \{hk : h \in H, k \in K\}$.
א. הוכיחו כי HK תתי-חבורה אם ורק אם $HK = KH$.
ב. הסיקו מהסעיף הקודם כי אם $N \triangleleft G$ תתי-חבורה נורמלית, אז $HN \leq G$ תתי-חבורה.
ג. הוכיחו כי אם $N_1, N_2 \triangleleft G$ תתי-חבורות נורמליות, אז $N_1 \cap N_2 \triangleleft G$ וגם $N_1 N_2 \triangleleft G$ תתי-חבורות נורמליות.

שאלה 4

- תארו את המחלקות השמאליות של תתי-החבורה H בחבורה G :
א. $H = 12\mathbb{Z}, G = 3\mathbb{Z}$.
ב. תהינה G_1, G_2 חבורות. $H = G_1 \times \{e_2\}, G = G_1 \times G_2$. כאשר e_2 הוא איבר היחידה של G_2 .
ג. $G = U_{30}, H = \langle 13 \rangle$.

שאלה 5

- תהי G חבורה. ראינו כי ישנה התאמה חח"ע ועל בין מחלקות שמאליות ולבין מחלקות ימניות לפי ההעתקה $\varphi: gH \mapsto Hg^{-1}$ כאשר $g \in G$ ו- $H \leq G$ תתי-חבורה. הוכיחו או הפריכו: ההעתקה $\psi: gH \mapsto Hg$ היא חח"ע ועל.

שאלה 6

א. כתבו בכתיב מחזורים את כל האיברים מסדר 4 בחבורה S_4 .
ב. הוכיחו כי החבורות S_4 ו- D_{12} הן לא איזומורפיות, למרות ששתיהן חבורות לא אבליות מסדר 24.

שאלה 7

עבור כל אחת מן הפונקציות הבאות הוכיחו כי היא הומומורפיזם. בדקו עבור כל פונקציה האם היא מונומורפיזם, האם היא אפימורפיזם והאם היא איזומורפיזם.

א. $f: (\mathbb{C}^*, \cdot) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot)$ המוגדרת על ידי $f(x) = x^5$.

ב. $f: (\mathbb{Q}^*, \cdot) \rightarrow (\mathbb{Q}^*, \cdot)$ המוגדרת על ידי $f(x) = x^5$.

ג. $f: G_1 \times G_2 \rightarrow G_2 \times G_1$ כאשר $g_1 \in G_1, g_2 \in G_2$ איברי חבורות אבליות G_1, G_2 בהתאמה והפונקציה מוגדרת על ידי $f(g_1, g_2) = (g_2^{-1}, g_1)$.

ד. $f: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot)$ המוגדרת על ידי $f(x) = e^x$. הפונקציה הזו נקראת exp.

שאלה 8

א. מצאו אפימורפיזם $\varphi: (M_5(\mathbb{Q}), +) \rightarrow (\mathbb{Q}^5, +)$ כאשר \mathbb{Q}^5 היא מכפלה קרטזית של חמישה עותקים של \mathbb{Q} .

ב. מצאו איזומורפיזם $\varphi: G \rightarrow \mathbb{C}^*$ כאשר $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0 \right\}$ שהוכחתם בתרגיל 1 שהיא חבורה.

שאלת אתגר

יהיו תמורות $\sigma, \tau \in S_n$ כך שמתקיים $\sigma = \tau^2$, אז נקרא ל- τ שורש של σ . מצאו תנאי מספיק והכרחי שקובע האם לתמורה נתונה $\sigma \in S_n$ קיים שורש. אם קיים שורש לתמורה, איך אפשר למצוא אותו?

שאלת אתגר

הוכחתם בהרצאה את המסקנה הבאה ממשפט לגראנז': תהי G חבורה סופית, ויהיו $K \leq H \leq G$ תתי-חבורות, אזי $[G:K] = [G:H][H:K]$.

כעת הוכיחו את אותה תוצאה כאשר מניחים רק ש- K תת חבורה מאינדקס סופי ב- G . כלומר, מבלי להניח ש- G סופית, ומבלי להניח סופיות של H .

בהצלחה!