תרגיל 8

12 בדצמבר 2017

1. קבעו האם הפונקציה הבאה רציפה בקטע $[-4,0]$. אם היא אינה רציפה, ציינו באילו נקודות. הוכיחו כל טענה.

$$f\left(x\right)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{4+x} & x<0\\ \frac{x+1}{4} & x\geq0 \end{cases}$$

פתרון:

בכל נקודה פנימית של הקטע הפונקציה רציפה כסכום ומנה של פונקציות רציפות.

נבדוק רציפות משמאל בנקודה $x=0$:

$$\lim_{x\to0^{-}}f\left(x\right)=\underset{\Delta x<0}{st}\left(f\left(\Delta x\right)\right)=st\left(e^{\frac{1}{\Delta x}}+\frac{1}{4+\Delta x}\right)=st\left(e^{-H}+\frac{1}{4+\Delta x}\right)=st\left(\frac{1}{e^{H}}+\frac{1}{4+\Delta x}\right)=\frac{1}{4}=f\left(0\right)$$

עבור $H=-\frac{1}{\Delta x}$ מספר אינסופי חיובי.

קיבלנו כי $\lim_{x\to0^{-}}f\left(x\right)=f(0)$ ולכן f רציפה משמאל בנקודה $x=0$.

נבדוק רציפות מימין בנקודה $x=-4$: $f(-4)$ לא מוגדרת, ובפרט אין רציפות מימין או משמאל בנקודה זאת.

לסיכום: הפונקציה אינה רציפה בקטע הסגור $[-4,0]$ אך רציפה בקטע החצי פתוח $(-4,0]$.

2. קבעו לאילו ערכי a,b ממשיים הפונקציה הבאה רציפה בקטע $[0,\infty)$:

$$f\left(x\right)=\begin{cases} \frac{\sqrt{9+x}-a}{x} & x>0\\ b & x=0 \end{cases}$$

פתרון:

לכל $x>0$ הפונקציה רציפה כהרכבה, סכום ומנה של פונקציות רציפות.

נחשב גבול מימין בנקודה $x=0$:

$$\lim_{x\to0^{+}}f\left(x\right)=\underset{\Delta x>0}{st}\left(f\left(\Delta x\right)\right)=st\left(\frac{\sqrt{9+\Delta x}-a}{\Delta x}\right)$$

כדי שהגבול יהיה קיים נדרוש $\sqrt{9+\Delta x}-a\approx0$ כלומר $a=3$. כעת נחשב את הגבול ונקבל:

$$\lim_{x\to0^{+}}f\left(x\right)=st\left(\frac{\sqrt{9+\Delta x}-3}{\Delta x}\right)=st\left(\frac{\left(\sqrt{9+\Delta x}-3\right)\left(\sqrt{9+\Delta x}+3\right)}{\Delta x\left(\sqrt{9+\Delta x}+3\right)}\right)=st\left(\frac{9+\Delta x-9}{\Delta x\left(\sqrt{9+\Delta x}+3\right)}\right)$$

$$= st\left(\frac{1}{\left(\sqrt{9+\Delta x}+3\right)}\right)=\frac{1}{6}$$

לכן כדי שהפונקציה תהיה רציפה מימין נדרוש $\lim_{x\to 0^+} f\left(x\right)=\frac{1}{6}=b=f\left(0\right)$.

לסיכום: $a=3, b=\frac{1}{6}$.

3. מצאו נקודות קיצון מקומי לפונקציה $f(x)=\sin x\cos x$ בקטע $(0,\pi)$.

פתרון:

$$f'\left(x\right)=\cos x\cos x-\sin x\sin x=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos\left(2x\right)$$

$$f''\left(x\right)=-2\sin\left(2x\right)$$

נמצא נקודות קריטיות:

נקודות קצה - אין. נקודות הבן הנגזרת לא קיימת - אין. נקודות בהן הנגזרת מתאפסת:

$$\cos\left(2x\right)=0 \implies 2x=\frac{\pi}{2}+\pi k \implies x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

ובתחום $(0,\pi)$נקבל את הנקודות: $x=\frac{\pi}{4}$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$. $x=\frac{3\pi}{4}$, $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$.

לפי מבחן הנגזרת השניה: $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2<0$ ולכן זוהי נקודת מקסימום מקומי.

$f''\left(\frac{3\pi}{4}\right)=2>0$ ולכן זוהי נקודת מינימום מקומי.

4. מצאו נקודות קיצון מקומי ותחומי עליה וירידה לפונקציה

$$f\left(x\right)=\begin{cases}x^3+3 & x\geq -2\\ \frac{1}{x+1}-x-6 & x<-2\end{cases}$$

פתרון:

נבדוק קודם איך הפונקציה מתנהגת מבחינת גזירות ורציפות:

רציפות: הפונקציה רציפה לכל $x>-2$ ולכל $-2<x$. עבור $x=-2$ נחשב גבולות חד צדדיים:

$$\lim_{x\to -2^+} f\left(x\right)=\underset{\Delta x>0}{st}\left(\left(-2+\Delta x\right)^3+3\right)=-5=f(-2)$$

וגבול משמאל:

$$\lim_{x\to -2^-} f\left(x\right)=\underset{\Delta x<0}{st}\left(\frac{1}{-2+\Delta x+1}+2-\Delta x-6\right)=-5=f(-2)$$

ולכן הגבול קיים ושווה לערך בנקודה, כלומר הפונקציה רציפה לכל x.

גזירות: הנגזרת קיימת לכל $x\neq -2$. עבור $x=-2$ נחשב $st\left(\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}\right)=st\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$:

עבור $\Delta x > 0$ נקבל:

$$st\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = st\left(\frac{(-2+\Delta x)^3 + 3 + 5}{\Delta x}\right) = st\left(\frac{-8 + 12\Delta x - 6(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 8}{\Delta x}\right) = 12$$

עבור $\Delta x < 0$ נקבל:

$$st\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = st\left(\frac{\frac{1}{-2+\Delta x+1} + 2 - \Delta x - 6 + 5}{\Delta x}\right) = st\left(\frac{\frac{1+(1-\Delta x)(-1+\Delta x)}{-1+\Delta x}}{\Delta x}\right) = st\left(\frac{2\Delta x - \Delta x^2}{\Delta x(-1+\Delta x)}\right) = -2$$

ולכן f לא גזירה ב $x = -2$.

הערה: בנקודה $x = -1$ הביטוי $\frac{1}{x+1} - x - 6$ לא מוגדר, אך 1- שייכת לתחום השני, ולכן לא נוצרת בעיה, והפונקציה גזירה ורציפה שם.

כעת נמצא נקודות קריטיות: אין נקודות קצה. נקודות בהן הנגזרת לא קיימת: $x = -2$.

נבדוק לפי המבחן הישיר: $-1 > -2 > -3$ ומתקיים: $f(-3) = -3.5 > f(-2) = -5 < f(-1) = 2$

ולכן זוהי נקודת מינימום מקומי.

נקודות בהן הנגזרת מתאפסת:

עבור $x > -2$ הנגזרת היא: $f'(x) = 3x^2 = 0 \implies x = 0$.

עבור $x < -2\ ,\ x \neq -1$ הנגזרת היא: $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} - 1$ והיא אינה מתאפסת בשום נקודה.

נבדוק לפי המבחן הישיר את הנקודה $x = 0$:

$-1 < 0 < 1$ ומתקיים: $f(-1) = 2 < f(0) = 3 < f(1) = 4$ ולכן זוהי לא נקודת קיצון.

נמצא תחומי עליה וירידה:

עבור $x < -2$ הנגזרת תמיד שלילית ולכן הפונקציה יורדת בתחום זה.

עבור $x > -2$ הנגזרת תמיד חיובית פרט לנקודה בודדת בה היא מתאפסת, ולכן עולה בתחום זה.

5. הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים $\ln(1+x) < x$.

פתרון:

נגדיר $f(x) = \ln(1+x) - x$ וצריך להוכיח כי $f(x) < 0$ לכל $x > 0$.

לכל $x > 0$ מתקיים:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-1-x}{1+x} = \frac{-x}{1+x} < 0$$

ולכן הפונקציה יורדת בתחום $(0,\infty)$. כלומר לכל $x > 0$ מתקיים $f(x) < f(0) = 0$ וקיבלנו את הדרוש.

6. תהי f פונקציה גזירה בקטע (a,b) הוכיחו או הפריכו:

(א) ל f יש נקודת קיצון בקטע (a,b).

(ב) אם אין ל f נקודת קיצון ב (a,b)אז $f'(x) \neq 0$ לכל $x \in (a,b)$.

(ג) אם $f'(x_0) = 0$ עבור $x_0 \in (a,b)$, אז x_0היא נקודת קיצון של f.

(ד) אם f עולה בקטע (a,b), אז $f'(x)>0$ לכל $x\in(a,b)$.

פתרון:

א. דוגמה נגדית: הפונקציה x^3 בקטע $(-1,1)$.

ב. דוגמה נגדית: הפונקציה x^3 בקטע $(-1,1)$.

ג. דוגמה נגדית: הפונקציה x^3 בקטע $(-1,1)$, $x_0=0$, $f'(0)=0$ אך 0 לא נקודת קיצון.

ד. דוגמה נגדית: הפונקציה x^3 עולה בקטע $(-1,1)$,אך $f'(0)=0$.

7. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם f גזירה ב x_0 אז f רציפה ב x_0.

(ב) אם f רציפה ב x_0 אז f גזירה ב x_0.

(ג) תהי f פונקציה רציפה ב (a,b), אם ל f יש מקסימום מקומי ב $x_0\in(a,b)$ אזי $f'(x_0)=0$ או $f'(x_0)$ לא קיימת.

פתרון:

א. נכון: אם f גזירה ב x_0, אזי לפי משפט השינוי בפרט מתקיים $\Delta y\approx 0$ כאשר $\Delta x\approx 0$, שזה אחד התנאים השקולים לרציפות.

ב. דוגמה נגדית: $|x|$ רציפה ב $x=0$ אך לא גזירה שם.

ג. נכון: לפי משפט הנקודה הקריטית, אם x_0 היא נקודת קיצון אז חייב להתקיים אחד משלושת התנאים.

כיוון שבקטע הפתוח (a,b)אין נקודות קצה, אחד משני התנאים האחרים: $f'(x_0)=0$ או $f'(x_0)$ לא קיימת, חייב להתקיים.