תרגיל 9

<u>הערה:</u> במהלך התרגילים אנחנו נשתמש בסימון

$$C_i^F(A,B) := \begin{cases} A & i \in F \\ B & i \notin F \end{cases}$$

כאשר F קבוצה ו־i איבר.

1. תהי (G,τ) חבורה טופולוגית, הוכיחו או הפריכו:

(א) אם $H \leq G$ היא תת חבורה פתוחה אז היא גם סגורה

(ב) אם $H \leq G$ היא תת חבורה סגורה אז היא גם פתוחה

(ג) רכיב הקשירות של $e \in G$ הוא תת חבורה סגורה.

<u>פתרון:</u>

הסעיף הראשון הוא הוכחה. נשים לב שאם $H \leq G$ תת חבורה אז

$$H^c = \bigcup_{g \notin H} gH$$

בנוסף, לפי הגדרת חבורה טופולוגית, פעולת ההזזה $L_g : G \to G$ שמוגדרת ע"י $L_g(h) = g \cdot h$ היא הומיאומורפיזם. לכן, אם H פתוחה אז גם gH פתוחה. מכאן ש־H^c קבוצה פתוחה כאיחוד של קבוצות פתוחות. לפי הגדרה, H סגורה.

הסעיף השני הוא הפרכה, אפשר להסתכל על $\mathbb{Z} \leq \mathbb{R}$.

הסעיף השלישי הוא הוכחה. ראשית נראה שהיא סגורה עבור הפעולה של החבורה. נניח ש־$x, y \in [e]$ איברים ברכיב הקשירות של $e \in X$, נראה ש־$xy^{-1} \in [e]$. נסתכל על הפונקציה $T_x : G \to G$ שמוגדרת ע"י $T_x(y) := xy^{-1}$. קל לראות שזו פונקציה רציפה. ידוע ש־$[e]$ קשיר ולכן $T_x([e])$ קשיר. שימו לב ש־$e, xy^{-1} \in T_x([e])$ ולכן $e \sim xy^{-1}$ במחלקת השקילות. לפי הגדרה $xy^{-1} \in [e]$ כרצוי.

2. נניח ש־$(X_i,\tau_i)_{i\in I}$ מרחבים טופולוגיים ונסתכל על $X := \Pi_{i\in I} X_i$ עם טופולוגיית המכפלה τ_Π. נניח ש־(Y,σ) הוא עוד מרחב טופולוגי ו־$f : Y \to X$. הוכיחו ש־f רציפה אם ורק אם $p_i \circ f$ רציפה לכל הטלה $p_i : X \to X_i$.

<u>פתרון:</u>

תוצאה ישירה של משפט הטופולוגיה החלשה.

3. יהיו $(X_i,\tau_i)_{i\in I}$ מרחבים טופולוגיים ונסתכל על $X := \Pi_{i\in I} X_i$ עם טופולוגיית הקופסה τ_b ־ Box Topology. זו הטופולוגיה שמושרית מהבסיס

$$\gamma = \left\{ \prod_{i\in I} U_i \mid U_i \in \tau_i \right\}$$

הרא שפונקציה $f:(Y,\sigma)\to(X,\tau_b)$ יכולה להיות רציפה בכל רכיב אבל עדיין לא רציפה.
<u>פתרון:</u>

אפשר להסתכל על פונקציית הזהות $id:(X,\tau_{\prod})\to(X,\tau_b)$. קל לראות שהפונקציה הזו לא רציפה כי טופולוגיית הקופסה חזקה מטופולוגיית המכפלה. בנוסף, בכל רכיב מתקיים ש־$\pi_i\circ id=\pi_i$ שרציפות בטופולוגיית המכפלה לפי הגדרה ולכן הפונקציה רציפה בכל רכיב.

כדי לוודא שטופולוגיית הקופסא אכן חזקה ממש מטופולוגיית המכפלה (אם לא מדובר בנקודונים או מרחבים טריוויאלים), מספיק לבחור קבוצה פתוחה $U_i\in\tau_i\setminus\{\emptyset,X_i\}$ ולהסתכל על $U:=\prod_{i\in I}U_i\in\tau_b\setminus\tau_{\prod}$.

4. יהיו $(X_i,\tau_i)_{i\in I}$ מרחבים דיסקרטיים לא ריקים. הראו ש־$X:=\Pi_{i\in I}X_i$ הוא מרחב דיסקרטי אם ורק אם $|X_i|=1$ פרט למספר סופי של מקומות.
<u>פתרון:</u>

ראשית, אם $|X_i|=1$ פרט למספר סופי של מקומות אז ברור ש־X הומיאומורפי למכפלה סופית של מרחבים דיסקרטיים וראינו בתרגול הקודם שזה בהכרח דיסקרטי.

מנגד, נניח ש־X דיסקרטי. נתון שהמרחבים לא ריקים ולכן קיים $\overline{x}\in X$. לפי הגדרה $\{\overline{x}\}\subseteq X$ קבוצה פתוחה בטופולוגיית המכפלה. לפי הגדרת טופולוגיית המכפלה, קיימת $F\subseteq I$ סופית וסביבות פתוחות $x_i\in O_i\in\tau_i$ כך ש־

$$O:=\bigcap_{i\in F}p_i^{-1}(O_i)\subseteq\{\overline{x}\}$$

נשים לב שלפי ההערות על המכפלה הקטרזית מההרצאה, עבור כל $j\notin F$ מתקיים

$$p_j(O)=X_j$$

ומנגד

$$p_j(O)\subseteq p(\{\overline{x}\})\Rightarrow|p_j(O)|\leq 1$$

ביחד מקבלים ש־$|X_j|\leq 1$. המרחבים לא ריקים ולכן $|X_j|=1$. זה נכון לכל $j\notin F$, שהיא סופית מה שמוכיח את הטענה שלנו.

5. יהיו $(X_i,\tau_i)_{i\in I}$ מרחבים טופולוגיים ו־$A_i\subseteq X_i$ לכל $i\in I$. נסמן $X:=\prod_{i\in I}X_i$. הוכיחו ש־

$$cl\left(\prod_{i\in I}A_i\right)=\prod_{i\in I}cl(A_i)$$

<u>פתרון:</u>
ראשית נראה ש־$\prod_{i\in I}cl(A_i)$ סגורה ב־X. אכן, נשים לב ש־

$$\prod_{i\in I}cl(A_i)=\bigcap_{i\in I}p_i^{-1}\Big(cl(A_i)\Big)$$

מכיוון ש־p_i רציפות ו־$cl(A_i) \subseteq X_i$ סגורה, אז גם $p_i^{-1}\left(cl(A_i)\right)$. מכאן שגם החיתוך שלהם סגור, כמו שרצינו. בנוסף קל לראות ש־

$$\prod_{i\in I} A_i \subseteq \prod_{i\in I} cl(A_i)$$

מכיוון שהסגור הוא הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר שמכילה קבוצה, אפשר להסיק ש־

$$cl\left(\prod_{i\in I} A_i\right) \subseteq \prod_{i\in I} cl(A_i)$$

מצד שני, נניח ש־$\bar{x} \in \prod_{i\in I} cl(A_i)$. כדי להראות את ההכלה ההפוכה נראה שכל סביבה של $\bar{x}$ חותכת את $\prod_{i\in I} A_i$. אכן, נניח ש־$\bar{x} \in O \in \tau_{\prod}$. לפי הגדרה, קיימת $F \subseteq I$ סופית וסביבות $x_i \in O_i \in \tau_i$ לכל $i \in I$ כך ש

$$\bigcap_{i\in F} p_i^{-1}(O_i) \subseteq O$$

לפי הגדרה $x_i \in cl(A_i)$ ולכן קיים $y_i \in O_i \cap A_i \neq \emptyset$. קל לראות מכאן ש־

$$(y_i)_{i\in I} \in \left(\bigcap_{i\in F} p_i^{-1}(O_i)\right) \cap \prod_{i\in I} A_i \neq \emptyset$$

כרצוי.

6. עבור כל אחת מהתכונות הבאות, הראו שאם $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ מקיימות אותה, כך גם המכפלה $X := \Pi_{i\in I} X_i$:

(א) קשירות

(ב) קשירות מסילתית

(ג) T_2

<u>פתרון:</u>

נניח ש־(X_i, τ_i) קשירות. אם אחת הקבוצות $\{X_i\}_{i\in I}$ ריקה אז גם המכפלה ולכן היא בפרט קשירה. נניח כעת שאף אחת מהקבוצות לא ריקה ונבחר $x_i^{(0)} \in X_i$ לכל x_i. נגדיר גם

$$supp\left((x_i)_{i\in I}\right) := \left\{i \in I \mid x_i \neq x_i^{(0)}\right\}$$

וגם

$$X' := \left\{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i \mid \left|supp\left((x_i)_{i\in I}\right)\right| < \infty\right\}$$

כלומר, X' היא קבוצת כל האברים שרק כמות סופית מההטלות שלהן לא נמצאות ב־$\left\{x_i^{(0)}\right\}_{i\in I}$. נשאיר את זה כתרגיל להוכיח ש־X' צפופה ב־X בטופולוגיית המכפלה.

ראינו בשאלה 4 בתרגול 6 שאם תת קבוצה צפופה קשירה אז כל המרחב קשיר. מכאן שמספיק להראות ש־X' קשיר. עבור קבוצה סופית $F \subseteq I$ נגדיר

$$X_F := \prod_{i\in I} C_i^F(X_i, \{x_i^{(0)}\})$$

קל לראות

$$X_F \simeq \prod_{i\in F} X_i$$

שהיא קבוצה קשירה לפי משפט על מכפלה סופית מהתרגול שעבר. בנוסף, לכל F סופית מתקיים ש־

$$\left(x_i^{(0)}\right)_{i\in I} \in X_F \neq \emptyset$$

ולכן אפשר להפעיל את משפט האלומות כדי להסיק ש־

$$X' = \bigcup_{F\subseteq I} X_F$$

קשירה גם היא, כרצוי (שימו לב שהאיחוד כאן הוא רק על קבוצות סופיות).

כעת נניח ש־(X_i, τ_i) קשירות מסילתית לכל $i \in I$ ויהיו $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I} \in X$. תהי $\gamma_i : [0,1] \to X_i$ מסילה שמחברת את x_i ל־y_i. נגדיר מסילה חדשה $\gamma : [0,1] \to X$ לפי

$$\gamma(t) := (\gamma_i(t))_{i\in I}$$

קל לראות שזו אכן פונקציה רציפה לפי תרגיל 2 היום. בנוסף, ברור ש־γ מחברת את $(x_i)_{i\in I}$ ל־$(y_i)_{i\in I}$, כרצוי.

לבסוף, נניח ש־(X_i, τ_i) הן T_2 ויהיו $(x_i)_{i\in I} \neq (y_i)_{i\in I} \in X$. לפי הגדרה, קיים $i_0 \in I$ כך ש־$x_i \neq y_i \in X_i$. מכיוון ש־X_i הוא T_2, קיימות סביבות $x_i \in U \in \tau_i, y_i \in V \in \tau_i$ כך ש־$U \cap V = \emptyset$. קל לראות ש־$(x_i)_{i\in I} \in p_i^{-1}(U) \in \tau_{\prod}$ ו־$(y_i)_{i\in I} \in p_i^{-1}(V) \in \tau_{\prod}$ הן סביבות זרות, כרצוי.

7. הראו שמכפלה בת מניה של מרחבים ספרבילים היא ספרבילית. כלומר, אם $(X_i, \tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ספרבילים, אז גם $X := \Pi_{i\in\mathbb{N}} X_i$ ספרבילית עם טופולוגיית המכפלה.
<u>פתרון:</u>

נניח ש־I בת מניה ולכל $i \in I$, תהי $A_i \subseteq X_i$ צפופה בת מניה. אם אחד מה־X_i־ים היה ריק אז הטענה הייתה טריוויאלית כי המכפלה הייתה ריקה גם כן. לכן, אפשר לבחור $x_i^{(0)} \in X_i$ כלשהו לכל $i \in I$. נגדיר $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{P}(I)$ להיות משפחת כל תת הקבוצות הסופיות של I. לכל $i \in I$ ו־$F \in \mathcal{Z}$ נגדיר

$$A_F := \prod_{i\in I} C_i^F(A_i, \{x_i^{(0)}\})$$

וגם

$$A := \bigcup_{F\in\mathcal{Z}} A_F$$

קל לראות ש־$A_F \simeq \prod_{i\in F} A_i$ היא בת מניה עבור כל $F \in \mathcal{Z}$. אם נראה ש־$\mathcal{Z}$ היא בת מניה אז A תהיה בת מניה כאיחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה. זו טענה ידועה מבדידה אבל נראה את זה בקצרה. נשים לב שישנה פונקציה חח"ע

$$\varphi : \mathcal{Z} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I^n$$

שמוגדרת ע"י קביעת סידור עבור כל האברים ב־$\mathcal{Z}$. מנגד, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I^n$ הוא איחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה ולכן בן מניה. מכאן ש־$\mathcal{Z}$ אכן בת מניה.

נשאר רק להראות ש־A אכן צפופה. בלי הגבלת הכלליות אפשר להניח ש־$I = \mathbb{N}$. יהי $\overline{x} \in X$ ויהיו $U_1, \dots, U_n$ קבוצות פתוחות כך ש־$U_i \in \tau_i$. נגדיר

$$O := \prod_{1\le i\le n} U_i \times \prod_{n<i\in\mathbb{N}} X_i$$

צריך להראות ש־

$$A \cap O \neq \emptyset$$

אכן, לכל $1 \le i \le n$ קיים $x_i \in A_i \cap U_i$. לכל $n < i \in \mathbb{N}$ נבחר $x_i = x_i^{(0)}$ כלשהו. קל לראות ש־$(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in A \cap O$ כרצוי.

8. בכל אחד מהסעיפים הבאים, מצאו מרחבים טופולוגיים $(X,\tau), (Y,\sigma)$ ו־$f : X \to Y$ כך ש:

(א) f רציפה, חח"ע, על אך לא פתוחה ולא סגורה

(ב) f רציפה, על, פתוחה אך לא סגורה

(ג) f רציפה, על, סגורה אבל לא פתוחה

(ד) f חח"ע, על, פתוחה, סגורה אבל לא רציפה.

<u>פתרון:</u>

i. נסתכל על $f : (\mathbb{R}, \tau_{disc}) \to (\mathbb{R}, \tau_e)$ שמוגדרת כפונקציית הזהות ו־τ_e היא הטופולוגיה האוקלידית.

ii. אפשר להסתכל על פעולת ההטלה $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ שמוגדרת ע"י $f(x,y) := x$. קל לראות ש־

$$A := \left\{ \left(x, \frac{1}{x}\right) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

סגורה אבל $f(A) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ לא סגורה.

iii. אפשר להסתכל על הפונקציה $f : [0,2] \to [0,1]$ שמוגדרת ע"י

$$f(x) := \min(x, 1)$$

iv. נסתכל על הפונקציה ההפוכה מסעיף א': $f : (\mathbb{R}, \tau_e) \to (\mathbb{R}, \tau_{disc})$ שמוגדרת גם היא כפונקציית הזהות.

9. הראו שמכפלה בת מניה של מרחבים מטריזביליים היא מטריזבילית

<u>פתרון</u>

יהיו $(X_i, d_i)_{i\in\mathbb{N}}$, מרחבים מטריים, נראה ש־$X := \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ מטריזבילי גם הוא. בלי הגבלת הכלליות, אפשר להניח ש־d_i חסומה על ידי 1 לכל $i \in \mathbb{N}$ כי תמיד אפשר להסתכל על $\widehat{d_i} := \min(d_i, 1)$ שמשרה טופולוגיה שקולה (נשאיר כתרגיל). נגדיר מטריקה d על X לפי

$$d(\overline{x}, \overline{y}) := \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^i} d_i(x_i, y_i)$$

מכיוון ש־$d_i(x_i, y_i) < 1$ לכל $x_i, y_i \in X_i$, הטור הזה תמיד מתכנס. בנוסף, קל לראות שזו אכן מטריקה. נראה שהיא שקולה לטופולוגיית המכפלה. אכן, נניח ש־$\overline{x} \in X$ ו־$\varepsilon > 0$. נמצא $N \in \mathbb{N}$ כך ש־$2^{-N} < \frac{\varepsilon}{2}$. אנחנו טוענים ש־

$$O := \prod_{i=1}^{N} B_i\Big(x_i, \frac{1}{2}\varepsilon\Big) \times \prod_{N<i\in\mathbb{N}} X_i \subseteq B(\overline{x}, \varepsilon)$$

כך ש־$B_i \subseteq X_i$ הוא הכדור לפי d_i ו־B הוא הכדור לפי d. אכן, אם $\overline{y} \in O$ אז לפי הגדרה $d_i(x_i, y_i) < \frac{1}{2}\varepsilon$ ולכן:

$$d(\overline{x}, \overline{y}) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^i} d_i(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^i} d_i(x_i, y_i) + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} d_i(x_i, y_i) \leq$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^{i+1}}\varepsilon + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \leq \frac{1}{2}\varepsilon + 2^{-N} < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

לפי הגדרה $\overline{y} \in B(\overline{x}, \varepsilon)$. ברור ש־$O$ פתוחה בטופולוגיית המכפלה ולכן היא חזקה מהטופולוגיה שמושרית מ־d.

מנגד, נניח ש־

$$\overline{x} \in O = \prod_{i=1}^{N} O_i \times \prod_{N<i\in\mathbb{N}} X_i$$

כאשר $O_i \in \tau_i$ היא קבוצה פתוחה. לפי הגדרה קיימות $\varepsilon_i > 0$ כך ש־$B_i(x_i, \varepsilon_i) \subseteq O_i$. נגדיר

$$\varepsilon := \min\{2^{-i}\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq N\}$$

אנחנו טוענים ש־$B(\overline{x}, \varepsilon) \subseteq O$. אכן, אם $\overline{y} \in B(\overline{x}, \varepsilon)$ אז לפי הגדרה $d(\overline{x}, \overline{y}) < \varepsilon$. בפרט, לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים ש־

$$\frac{1}{2^i} d(x_i, y_i) < \varepsilon \Rightarrow d(x_i, y_i) < 2^i\varepsilon \leq 2^i 2^{-i}\varepsilon_i = \varepsilon_i$$

לכן $y_i \in B_i(x_i, \varepsilon_i) \subseteq O_i$. זה מראה שטופולוגיית המכפלה חלשה מהטופולוגיה המושרית מהמטריקה מה שמסיים את ההוכחה.

10. אתגר: הראו שמכפלה מעוצמת הרצף של מרחבים ספרבילים היא ספרבילית.
פתרון:

יעלה במסגרת הפתרון לחידה השבועית.

11. השלימו את הטבלה הבאה

תכונה	מכפלה סופית	מכפלה בת מניה	מכפלה מעוצמת הרצף	מכפלה כללית
דיסקרטיות	כן	לא	לא	לא
קשירות	כן	כן	כן	כן
קשירות מסילתית	כן	כן	כן	כן
ספרביליות	כן	כן	כן! (ואו)	לא
B_2	כן	כן	לא	לא
B_1	כן	כן	לא	לא
T_2	כן	כן	כן	כן
מימד אפס	כן	כן	כן	כן
מטריזביליות	כן	כן	לא	לא