מושגים 1א תרגיל 3

①

<u>הגדרה:</u> יהיו $(X, \mathbb{A})$, $(Y, \mathbb{B})$ מרחבים מדידים.

ותהי $f: X \to Y$, $E \in \mathbb{B}$: $f^{-1}[E] \in \mathbb{A}$

נאמר כי f מדידה - $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$. (שמספיק לבדוק את התנאי עבור מערכת יוצרת של $\mathbb{B}$).

במקרה בו Y מרחב <u>טופולוגי</u>, ו-$\mathbb{B} = \mathbb{B}(Y)$ היא σ-אלג' בורל של Y.

ו- $f: X \to Y$ מדידה $(\mathbb{A}, \mathbb{B}(Y))$ נאמר כי f פונקציה מדידה - $\mathbb{A}$.

ואם גם X מרחב <u>טופולוגי</u> ו- $f: X \to Y$ מדידה - $\mathbb{B}(X)$ נאמר כי f פונקציה <u>בורלית</u>.

Scanned by CamScanner

תרגיל: יהי $(X,\mathbb{A})$ מרחב מדיד כאשר $\mathbb{A}=\{\emptyset,X\}$

מהן הפונקציות $f:X\to\mathbb{R}$ המדידות - $\mathbb{A}$?

ראינו בהרצאה:

פתרון: f מדידה-$\mathbb{A}$ $\Leftrightarrow$ לכל $c\in\mathbb{R}$ $[f>c]\in\mathbb{A}$ $\Leftrightarrow$ $[f\le c]\in\mathbb{A}$

משלים.

$\Leftarrow$ $(-f)$ מדידה $\mathbb{A}$

ולכן גם $[-f>-c]\in\mathbb{A}$ $\forall c\in\mathbb{R}$

כלומר

$[f\ge c]\in\mathbb{A} \Leftrightarrow [f<c]\in\mathbb{A}$

משלים

בפרט $[f\ge c]\cap[f\le c]\in\mathbb{A}$

$$[f=c]$$

וזה לכל $c\in\mathbb{R}$.

כיוון ש $\mathbb{A}=\{\emptyset,X\}$, אז לכל $c\in\mathbb{R}$ $[f=c]=\emptyset$ או $=X$

אז ודאי $C_1\neq C_2$ ממשיים $[f=c_1]\neq[f=c_2]=X$

לכן קיים C_1 יחיד כך ש $[f=c_1]=X$

ולכל $C\neq C_1$ $[f=c]=\emptyset$

כלומר $f\equiv C_1$ קבועה על X.

תרגיל: יהי $(\mathbb{R}, \mathbb{A})$ מרחב מדיד.

כאשר $\mathbb{A} = \{A \mid$ A בורלית וגם $A = -A\}$

מהן הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המדידות-$\mathbb{A}$?

פתרון: נוכיח, ראשית, ש $\mathbb{A}$ σ-אלג':

(א) ודאי $\mathbb{R}, \emptyset \in \mathbb{A}$ - בורליות וסימטריות ביחס לראשית.

(ב) אם $A \in \mathbb{A}$ אזי:

A בורלית $\Rightarrow$ A^c בורלית.

וגם $x \in A^c \iff x \notin A \underset{A=-A}{\iff} -x \notin A \iff -x \in A^c$

לכן $A^c = -A^c$

ומסקנה $A^c \in \mathbb{A}$

(ג) נניח $(A_n)_{\mathbb{N}} \subset \mathbb{A} \Rightarrow \bigcup_{\mathbb{N}} A_n$ בורלית.

וגם $x \in \bigcup_{\mathbb{N}} A_n \iff$ קיים n כך ש: $x \in A_n \iff -x \in A_n \iff -x \in \bigcup_{\mathbb{N}} A_n$

לכן $-\left(\bigcup_{\mathbb{N}} A_n\right) = \left(\bigcup_{\mathbb{N}} A_n\right)$

ומסקנה $\bigcup_{\mathbb{N}} A_n \in \mathbb{A}$ כנדרש..

כעת $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מדידה $\mathbb{A}$ אזי לכל $c\in\mathbb{R}$:

$[f \geq c] \in \mathbb{A} \iff [f \geq c]$ קבוצה סימטרית ובורלית.

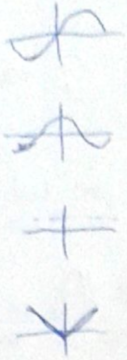
לכן, לכל x: $f(x) \geq c \iff f(-x) \geq c$ וזה לכל $c\in\mathbb{R}$.

כלו' $f(-x) = f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$.

קיבלנו: f מדידה-$\mathbb{A}$ אם"ם היא בורלית וזוגית.

Scanned by CamScanner

הראו



$\sin x$ מדידה - $\mathcal{A}$?

$\cos x$?

קבועה ?

$|x|$?

טענה: תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. פונקציה בורלית.
אם f גזירה ב-$\mathbb{R}$ אזי f' בורלית.

הוכחה: f גזירה ב-$\mathbb{R}$, בפרט רציפה ולכן בורלית.
לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר פונקציה $g_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ע״י

$g_n(x):=n(f(x)-f(x-\frac{1}{n}))$. אזי $\lim_{n\to\infty} g_n(x)=f'(x)$ $\forall x$

קיום הגבול נתון (f גזירה ב-$\mathbb{R}$)

ולכל n g_n מדידה כהרכב של מדידות, כאמור בורלית.

לכן $\lim g_n$ בורלית. ∎

תרגיל: יהיו $(X,\mathcal{A})$ מרחב מדיד. ו- $f:X\to\mathbb{R}$
ו- $(A_n)_{\mathbb{N}}$ אוסף קבוצות מדידות. כאשר $X=\bigcup_{\mathbb{N}} A_n$
הוכיחו: f מדידה-$\mathcal{A}$ אמ״ם $f|_{A_n}$ מדידה-$\mathcal{A}$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

הוכחה: $\Leftarrow$ נניח כי f מדידה. יהי $n\in\mathbb{N}$ נראה כי $f|_{A_n}$ מדידה-$\mathcal{A}$.
יהי $\alpha\in\mathbb{R}$. אזי $[f|_{A_n}>\alpha]=[f>\alpha]\cap A_n$
f מדידה לכן $[f>\alpha]\in\mathcal{A}$ היות ונתון כי A_n מדידה ו-$\mathcal{A}$ סגורה תחת חיתוך נקבל ש- $[f|_{A_n}>\alpha]\in\mathcal{A}$ וזאת לכל α.

לכן, $f|_{A_n}$ מדידה-$\mathcal{A}$ $\forall n$ כנדרש.

$\Leftarrow$ נניח כעת, כי לכל $n\in\mathbb{N}$ $f|_{A_n}$ מדידה $\mathbb{A}$, ונוכיח f מדידה $\mathbb{A}$

לכל n ולכל $\alpha\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$A_n \cap [f > \alpha] = [f|_{A_n} > \alpha] \in \mathbb{A}$$

אולם

$$[f>\alpha] = X\cap[f>\alpha] = [f>\alpha]\cap\Big(\bigcup_{\mathbb{N}} A_n\Big)$$

$$= \bigcup_{\mathbb{N}}\big(\underbrace{[f>\alpha]\cap A_n}_{\in\mathbb{A}}\big)$$

$\Leftarrow$ לכן $[f>\alpha]\in\mathbb{A}$ כאיחוד מני של קב' מדידות ב$\mathbb{A}$.

וזה לכל $\alpha\in\mathbb{R}$, ומכאן ש f מדידה-$\mathbb{A}$.

כנדרש.

תרגיל: תהי $U\subseteq\mathbb{R}^d$ פתוחה. ותהי $f:U\to\mathbb{R}$

הוכח שהקבוצה:

$$A = \{x\in U \mid f \text{ רציפה ב } x\}$$

היא מטיפוס G_δ (כלומר: חיתוך מני של קב' פתוחות)

ולכן (בפרט) מדידה ב $\mathbb{B}(\mathbb{R}^d)$

פתרון:

לכל $0<\delta$ ו $x\in U$ נגדיר את התנודה של f בכדור $B(x,\delta)$ ע"י

$$\omega(x,\delta) := \sup\{|f(s)-f(t)| \mid s,t\in B(x,\delta)\}$$

ואת התנודה הנקודתית ע"י

$$\omega(x) = \inf\{\omega(x,\delta) \mid \delta>0\}$$

טענה מוקדמת:

לכל $a\in\mathbb{R}$ הקבוצה

$E_a=\{x\mid \omega(x)<a\}$ פתוחה. (ב-$\mathbb{R}^d$)

הוכחת הטענה: נראה כי לכל $x_0\in E_a$ קיים סביבה x_0 (פתוחה) שמוכלת ב-E_a:

תהי $x_0\in E_a$ אזי, קיים $\delta_0>0$ כך ש

$$\omega(x_0,\delta_0)=\sup\{|f(t)-f(s)|\mid t,s\in B(x_0,\delta_0)\}<a$$

ויתרה, לפי ההגדרה, $\omega(x_0)$ לכן היא קטן מ-a במטרה להוכיח ש-x_0 שייך ל-E_a.

לכן, אם $x\in B(x_0,\delta_0/2)$ אזי

$$\omega(x,\delta_0/2)=\sup\{|f(s)-f(t)|\mid t,s\in B(x,\delta_0/2)\}$$

$$\leq\sup\{|f(s)-f(t)|\mid t,s\in B(x_0,\delta_0)\}<a$$

ונסיק ש- $\omega(x)<a$ כ-inf. ונכון לכל $x\in B(x_0,\delta_0/2)$. כנדרש.

עד כאן הוכחת הטענה.

כעת, כי f רציפה ב-x אמ"מ $\omega(x)=0$
(כלומר אין תנודה של f ב-x)

ולכן,

$$A=\{x\mid\omega(x)=0\}=\bigcap_{\mathbb{N}}\{x\mid\omega(x)<\tfrac{1}{n}\}$$

$$=\bigcap_{\mathbb{N}}E_{1/n}$$

לפי הטענה הקודמת לכל n $E_{1/n}$ פתוחה ולכן A מטיפוס G_δ.

תרגיל: הראו כי ה-σ אלגברה הנוצרת ע"י היחידונים ב-$\mathbb{R}$. מוכלת ממש באלגברת בורל של $\mathbb{R}$

פתרון: נגדיר

$$\mathbb{A} := \{A \subset \mathbb{R} \mid A \text{ בת"מ או } A^c \text{ בת"מ}\}$$

טענה: $\mathbb{A}$ היא σ-אלג'

הוכחה: (לפי ההגדרה האקסיומטית)

1) $\emptyset \in \mathbb{A}$ וגם $\Leftarrow$ $\mathbb{R} \in \mathbb{A}$

2) אם $A \in \mathbb{A}$ אז $A = (A^c)^c$ בת"מ $\Leftarrow$ A^c בת"מ $\Leftarrow A \in \mathbb{A}$

או A^c בת"מ $\Leftarrow$ $A \in \mathbb{A}$

3) יהיו $(A_n)_{\mathbb{N}}$ סדרת קבוצות ב-$\mathbb{A}$ אז:

מקרה ראשון: כל ה-A_n בת"מ $\Leftarrow$ $\bigcup_{\mathbb{N}} A_n$ בת"מ $\Leftarrow$ $\bigcup_{\mathbb{N}} A_n \in \mathbb{A}$

" שני: קיימת $A_{n_0} \in (A_n)_{\mathbb{N}}$ שאינה בת"מ, אז $A_{n_0}^c$ בת"מ ומשוויון:

$$\left(\bigcup_{\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcap_{\mathbb{N}} A_n^c \subseteq A_{n_0}^c$$

ולכן, $\left(\bigcup_{\mathbb{N}} A_n\right)^c$ בת"מ $\Leftarrow$ $\bigcup_{\mathbb{N}} A_n \in \mathbb{A}$

משל טענה. ■

כעת נשים לב ש- $\mathbb{A}$ מכילה את כל היחידונים ב-$\mathbb{R}$.

ומכיוון ש- $\mathbb{A}_0 := \mathbb{F}(\{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\}) \subseteq \mathbb{A}$

מצד שני, $\mathbb{A} \underset{\text{ממש!}}{\subsetneq} \mathbb{B}(\mathbb{R})$ כי כל בת"מ היא איחוד של קבוצות סגורות

אבל קטע פתוח שייך ל-$\mathbb{B}(\mathbb{R})$, אך לא ל-$\mathbb{A}$

לכן $\mathbb{A}_0 \underset{\text{ממש}}{\subsetneq} \mathbb{B}(\mathbb{R})$ כנדרש ■

האם איחוד של σ-אלג' הוא σ אלג'?

<u>טיעון</u>: נמצא עבור קבוצה X זו σ אלג': S_1, S_2 כך ש $S_1 \cup S_2$ <u>אינו</u> σ אלג'

<u>פתרון</u>: נגדיר $X = \{1,2,3\}$

$S_1 = \{\{1\},\{2,3\},\emptyset,\{1,2,3\}\}$

$S_2 = \{\{1,2\},\emptyset,\{3\},\{1,2,3\}\}$

קל לבדוק כי S_1, S_2 הינן σ אלג'

ואילו $S_1 \cup S_2 = \{\{1\},\{2,3\},\emptyset,\{1,2,3\},\{1,2\},\{3\}\}$

<u>אינה</u> σ אלג', שכן $\{1\}\cup\{3\} \notin S_1 \cup S_2$

<u>מסק'</u>: איחוד σ אלג' <u>אינו</u> בהכרח σ אלג'.