

## תרגיל 2 חשבון אינפיניטסימלי 3 תשע"ו

27 באוקטובר 2015

1. הוכיחו שהפונקציות הבאות הן מטריקות על המרחבים הנתונים:

(א) ב- $\mathbb{R}^+$ ,  $d(x, y) = \left| \ln \frac{y}{x} \right|$

(ב) במרחב נורמי  $V$ ,  $d(x, y) = \|x\| + \|y\|$  כאשר  $x \neq y$ , ו- $d(x, y) = 0$  כאשר  $x = y$

(ג) בקבוצה  $X$ ,  $d(x, y) = 1$  כאשר  $x \neq y$  ו- $d(x, y) = 0$  כאשר  $x = y$

(ד) במרחב מטריצות  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ ,  $d(X, Y) = \text{rank}(X - Y)$

2. נסמן ב- $A'$  את אוסף נקודות ההצטברות של  $A$ . יהי  $X = \mathbb{R}$ . תהי  $A = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ . מהן  $A'$ ,  $A''$ ?

3. האם הקבוצות הבאות פתוחות? סגורות?

(א) ב- $\mathbb{R}^2$ ,  $A = \{(x, y) | y = 0, x \in (0, 1)\}$

(ב) ב- $\mathbb{R}^2$ ,  $B = \{(x, y) | x = y\}$

(ג) ב- $\mathbb{R}^2$ ,  $C = \{(x, y) | x > 0, y < 0, x + y > -1\}$

4. האם הקבוצות הבאות פתוחות ב- $\mathbb{R}^n$ ? סגורות? מצאו את קבוצת נקודות הגבול.

(א)  $A = \{(0, 1), (0, 0)\}$

(ב)  $B = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(0, 1)\}$

(ג)  $C = \{(x, y) | x > 0, y < 0\}$

5. בכל אחד מהסעיפים הבאים, תנו דוגמה למרחב מטרי וקבוצות מתאימות.

(א) איחוד של קבוצות סגורות שאינו קבוצה סגורה.

(ב) חיתוך של קבוצות פתוחות שאינו קבוצה פתוחה (אפשר כמובן להשתמש בדה-מורגן).

(ג) קבוצה סגורה וחסומה שאינה קומפקטית.

6. תהי  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  סדרה חסומה ב- $\mathbb{R}^n$ . נניח שהסדרה  $\{d_2(x_n, 0)\}_{n \in \mathbb{N}}$  (המטריקה האוקלידית) עולה ממש. האם  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  מתכנסת?