תרגיל 13 מבוא לתורת החבורות

שאלה 13.1 מצאו דוגמא של חבורה G הפועלת על קבוצה X, כך ש $\gcd(|G|,|X|)=1$ ולמרות זאת אין ל X נקודות שבת. (כזכור, הראנו בכיתה שאם בנוסף מניחים ש G חבורת p אז חייבות להיות נקודות שבת).

פתרון: אפשר לקחת $G=\mathbb{Z}_6$. G פועלת על הקבוצה $X_1=\{0,1\}$ לפי פעולה

$$g*x=(g+x) \mod 2$$

והיא גם פועלת על הקבוצה $X_2=\{0,1,2\}$ לפי פעולה

$$g*x=(g+x) \mod 3$$

אז היא גם פועלת על הקבוצה $X_1\dot{\cup}X_2$ כפי שראינו שבוע שעבר (הערה: צריך לקחת עותקים של $0,1$ כדי שזה באמת יהיה איחוד זר). עכשיו

$$|X_1\dot{\cup}X_2|=5$$

שזה זר לגודל של $\mathbb{Z}_6$ ולמרות זאת אין נקודות שבת.

שאלה 13.2 תהי G חבורה מסדר 77 הפועלת על קבוצה X בת 6 איברים. מצאו את הפעולה.

פתרון: כל מסלול צריך לחלק את הגודל של G. אף מספר בין 2 ל 6 לא מחלק את 77 ולכן כל המסלולים הם באורך 1 כלומר הפעולה טריויאלית

$$g*x=x$$

שאלה 13.3 תהי X קבוצת כל הלוחות 2×2 שכל ריבוע שלהם צבוע באחד משני הצבעים שחור/לבן. שימו לב שיש $2^4=16$ לוחות כאלה. ניקח $G=D_4$ ונגדיר פעולה טבעית שבה σ היא סיבוב (נניח לכיוון ימין) ו τ היא שיקוף (נניח ביחס לאלכסון הראשי) מצאו את כל המסלולים ועבור כל איבר מצאו את המייצב שלו. מומלץ להעזר במשפט על גודל המייצב ומומלץ לוודא שמייצבים של איברים באותו מסלול הם צמודים.

פתרון: המסלולים הם זהים למה שהיה בתרגיל שבוע שעבר. בואו נגיד ש 1 זה שחור ו 0 זה לבן אז המסלולים הם כאלה:

מסלול 1: $\begin{matrix}1&1\\1&1\end{matrix}$

מסלול 2: $\begin{matrix}0&1\\1&1\end{matrix},\begin{matrix}1&1\\0&1\end{matrix},\begin{matrix}1&1\\1&0\end{matrix},\begin{matrix}1&0\\1&1\end{matrix}$

מסלול 3: $\begin{matrix}0&1\\0&1\end{matrix},\begin{matrix}1&1\\0&0\end{matrix},\begin{matrix}1&0\\1&0\end{matrix},\begin{matrix}0&0\\1&1\end{matrix}$

מסלול 4: $\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix},\begin{matrix}0&1\\1&0\end{matrix}.$

מסלול 5: $\begin{matrix}0&0\\0&1\end{matrix},\begin{matrix}1&0\\0&0\end{matrix},\begin{matrix}0&1\\0&0\end{matrix},\begin{matrix}0&0\\1&0\end{matrix}$

מסלול 6: $\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}$

מה המייצבים? המייצב של האיבר היחיד במסלול 1 או 6 הוא כל D_4.

במסלול 2: המייצב של $\begin{matrix}1&1\\1&0\end{matrix}$ ו $\begin{matrix}0&1\\1&1\end{matrix}$ הוא $\{\mathrm{id},\tau\}$ והמייצב של השניים האחרים הוא $\{\mathrm{id},\tau\sigma^2\}$

דבר דומה קורה במסלול 5.

במסלול 3: המייצב של $\begin{matrix}0&0\\1&1\end{matrix}$ ו $\begin{matrix}1&1\\0&0\end{matrix}$ הוא : $\{\mathrm{id},\tau\sigma^3\}$ והמייצב של השניים האחרים הוא $\{\mathrm{id},\tau\sigma\}$

במסלול 4: המייצב של כל איבר הוא $\{\mathrm{id},\sigma^2,\tau,\tau\sigma^2\}$.

שאלה 13.4 תהי G חבורה סופית.

1. הוכיחו כי אם $a\in G$ צמוד ל a^{-1} אז כל איבר x במחלקת הצמידות של a צמוד להופכי שלו x^{-1}.
פתרון: נסמן רגע צמידות עם $\sim$. בעצם נתון ש $a\sim a^{-1}$ ו $a\sim x$ וצריך להוכיח ש $x\sim x^{-1}$. הנתון $a\sim x$ אומר שקיים $g\in G$ כך ש

$$gag^{-1}=x$$

ולכן

$$(gag^{-1})^{-1}=x^{-1}$$

$$ga^{-1}g^{-1}=x^{-1}$$

ולכן

$$a^{-1}\sim x^{-1}$$

אז לפי טרנזיטיביות

$$x\sim x^{-1}$$

כנדרש.

2. הוכיחו כי אם G חבורה מסדר אי זוגי אז אין איבר $a\in G$ שצמוד ל a^{-1}.
פתרון: קודם כל, אם G חבורה מסדר אי זוגי אז אין איברים מסדר 2 (לפי לגרנז') ולכן האיבר היחיד שמקיים ש $x=x^{-1}$ הוא $x=e$ היחידה. חוץ ממנו כל החבורה מתחלקת לזוגות $\{x,x^{-1}\}$ כאשר $x\neq x^{-1}$. עכשיו הוכחנו שגודל מחלקת צמידות מחלק את G ולכן הגודל של כל מחלקת צמידות הוא אי זוגי. עכשיו, ניקח $e\neq a\in G$ ונסתכל על מחלקת הצמידות שלו . (המטרה היא להוכיח ש a^{-1} לא נמצא שם). קודם כל ניזכר ש e לא צמוד ל a כי e צמוד רק לעצמו. נניח בשלילה ש a^{-1} צמוד ל a. אז לפי סעיף א' מחלקת הצמידות מכילה את הצמוד של כל איבר בה ולכן היא מכילה הרבה זוגות של איברים ולכן היא בגודל זוגי. זו סתירה. מש"ל

שאלה 13.5 נגדיר

$$G=\{\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}\mid a,b,c\in\mathbb{Z}_3\}$$

זאת חבורה ביחס לפעולה של כפל מטריצות שכבר נתקלנו בה בתרגיל בעבר. חשבו את המרכז של G. רמז: מה הסדר של G?

פתרון: הסדר של G הוא $3^3=27$. לפי משפט מההרצאה $|Z(G)|>1$. לא ייתכן ש $Z(G)=G$ כי G לא אבלית. וגם לא ייתכן ש $|Z(G)|=p^2$ כי אז $G/Z(G)$ היא חבורה ציקלית לא טריויאלית וראינו בתרגיל שזה לא אפשרי ולכן בהכרח

$$|Z(G)|=p$$

עכשיו, סביר לנחשב ש

$$Z(G)=\{\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\mid x\in\mathbb{Z}_3\}$$

ובדיקה קלה מאמתת ש

$$\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&a&x+b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}$$

ובזה סיימנו.