~~**משפט המנה:** יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ טור חזקות ונניח ש $a_n\neq 0$ לכל n. (נסמן:)~~

~~$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$~~

~~הטור מתכנס עבור $|x-x_0|<R$ ומתבדר עבור $|x-x_0|>R$.~~

הגדרות לסיכום (~~[illegible]~~ טורי חזקות)

הגדרה: 1) טור חזקות סביב הנק' x_0 הוא טור ~~[illegible]~~ מהצורה $\sum a_n(x-x_0)^n$. (נאמר ש-f ניתנת לפיתוח בסביבה A לטור חזקות סביב x_0 אם מתקיים: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ לכל $x\in A$

~~[illegible]~~ ~~**הגדרה:**~~ 2) מספר ממשי R (נקרא רדיוס ההתכנסות) של הטור אם הטור מתכנס עבור $|x-x_0|<R$ ומתבדר עבור $|x-x_0|>R$. ~~[illegible]~~

משפט (קושי הדמר) יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ טור חזקות.

אזי $R=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$. אם המכנה הוא ∞ אזי $R=0$ או הוא 0 אזי $R=\infty$

מסקנה: $$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

הערה: המשפט הזה אינו נותן אינפורמציה על מה קורה בקצוות הקטע $(-R,R)$

~~משפט~~ **הגדרה:** ~~[illegible]~~ טור (נקרא) שמחליף סימן אם כל איבריו מחליפים סימן לסירוגין

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n \quad (a_n>0)$$

משפט לייבניץ: אם ~~הסדרה~~ $\{a_n\}$ מונוטונית יורדת! ו- $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ אזי הטור מחליף סימן מתכנס.

תרגיל:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

(נראה ש-הסדרה מונוטונית יורדת:

$$\left\{ \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right\}$$

$$\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \overset{?}{<} \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+2}} \overset{?}{<} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

מכיוון $\frac{n+2}{n+1} < \frac{n+1}{n}$ וזה נכון לכל n טבעי

כלומר הסדרה מונוטונית יורדת לאפס, ~~[illegible]~~ הטור

(הטור הוא מחליף סימן $\Leftarrow$ מתכנס.

תרגיל:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sqrt{1-\cos\frac{1}{n}} =$$

(נשנה את הטור בצורה הבאה:

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sqrt{2\sin^2\frac{1}{2n}} = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin\frac{1}{2n}$$

הסדרה $\left\{\sin\frac{1}{2n}\right\}$ מונוטונית יורדת לאפס

ולכן ~~הטור~~ ~~[illegible]~~ הטור מחליף סימן ולכן מתכנס.

תרגילים! [illegible]

1) עבור אילו ערכים של x ~~הטור~~ ~~מתכנס~~?

1. $$\sum \frac{x^{k-1}}{k \cdot 3^k}$$

4) פתרון: נשתמש במבחן המנה:

$$\cancel{\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{x^k}{(k+1)\cdot 3^{k+1}}\cdot\frac{k\cdot 3^k}{x^{k-1}}\right| = \left|\frac{kx}{3(k+1)}\right| \xrightarrow{k\to\infty} \left|\frac{x}{3}\right| < 1}$$

$$\cancel{|x| < 3}$$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{1}{(k+1)\cdot 3^{k+1}}\cdot k\cdot 3^k\right| = \left|\frac{k}{3(k+1)}\right| \to \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $R=3$ ממבחן המנה

כלומר הטור מתכנס לכל $|x|<3$

נבדוק מה קורה ב $x=\pm 3$:

__$x=-3$:__

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{k\cdot 3^k} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$$

זה טור לייבניץ ולכן מתכנס.

__$x=3$:__

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{k\cdot 3^k} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

וזהו טור הרמוני ולכן מתבדר.

תחום ההתכנסות הינו: $[-3,3)$

ב) ~~לאילו ערכי x הטור מתכנס?~~

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

X

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot\frac{(2k-1)!}{(-1)^{k-1}}\right| = \underset{\text{פתרון:}}{\frac{1}{2k(2k+1)}} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

~~לכן הטור מתכנס ב-0~~

לכן הטור מתכנס לכל x ולכן תחום

ההתכנסות הינו $(-\infty,\infty)$

ב.

$$\sum_{k=1}^{\infty} k!(x-a)^k$$

~~פתרון:~~

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{(k+1)!}{k!}\right| = |k| \longrightarrow \infty$$

~~לכן הטור הטור מתכנס רק (רק בנק')~~ $x=a$

ג.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(x-1)^k}{2^k(3k-1)}$$

פתרון:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{(k+1)}{2^{k+1}(3k+2)} \cdot \frac{2^k(3k-1)}{k}\right| =$$

$$= \left|\frac{(k+1)}{2(3k+2)} \cdot \frac{(3k-1)}{k}\right| \longrightarrow \frac{1}{2}$$

לכן הטור מתכנס עבור $|x-1|<2$ והטור מתבדר

עבור $|x-1|>2$.

בדיקת הקצה של תחום ההתכנסות: $|x-1|=2$

לכן הקטע הוא ~~(-2~~ $(-1,3)$:

עבור $x=3$ נקבל:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(x-1)^k}{2^k(3k-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3k-1}$$

האם הכלל מת"ק עד"ק?:

$$a_k = \frac{k}{3k-1} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{3} \neq 0$$

ולכן הטור מתבדר.

עבור $x=-1$ (נקי):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(x-1)^k}{2^k(3k-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot k}{3k-1}$$

לכן זה טור מתבדר מאותה סיבה.

תרגילים נוספים:

א. $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n$

<u>פתרון:</u> נשתמש במבחן השורש:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^3}} = 1$$

~~[illegible] $x=$~~ ולכן $R=1$

עבור $x=1$ נקבל: $\sum_{n=0}^{\infty} n^3$ מתבדר

עבור $x=-1$ נקבל: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^3 \cdot n^3$ מתבדר

כי האיבר הכללי לא שואף לאפס.

ולכן תחום ההתכנסות הוא $(-1,1)$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{(2n)!}$

<u>פתרון:</u> נציב $t=x^2$ ונקבל טור חזקות רגיל:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot t^n}{(2n)!}$$

ואז

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}$$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{\frac{1}{(2n)!}}{\frac{1}{(2n+2)!}} = (2n+1)(2n+2) \to \infty$$

ולכן תחום ההתכנסות של הטור הוא $(-\infty,\infty)$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) x^n$

<u>פתרון:</u> נשתמש במבחן השורש:

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

(2) נשים לב ש

$$\frac{1}{2} \le \left|\cos\frac{\pi n}{3}\right| \le 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{2}} \le \sqrt[n]{\left|\cos\frac{\pi n}{3}\right|} \le \sqrt[n]{1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{2}} \to 1, \quad \sqrt[n]{\left|\cos\frac{\pi n}{3}\right|} \to 1, \quad \sqrt[n]{1} \to 1$$

כלומר רדיוס ההתכנסות = 1

~~עבור X~~ לכל $X=\pm 1$ $\cos\frac{\pi n}{3}$ לא

מתכנס לאפס ולכן תחום ההתכנסות הוא

$(-1, 1)$

(3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{n^{(\ln n)}} x^n$$

פתרון:

$$\sqrt[n]{\frac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}}} = \frac{\ln n}{n^{\frac{\ln n}{n}}}$$

עבור המכנה נקבל:

$$n^{\frac{\ln n}{n}} = e^{\frac{\ln^2 n}{n}} \to e^0 = 1$$

ולכן

$$\sqrt[n]{\frac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}}} \to \infty$$

ולכן $R=0$. כלומר הטור מתכנס רק כש- $X=0$

(1) המשך לפונקציות. מצא את תחום ההתכנסות עבור טורי החזקה הבאים:

א)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+5}{4n^2+n}\left(\frac{x}{3}\right)^n$$

ב)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{8^n \sqrt{n}}(x-2)^{3n}$$

פתרון לא' (נמצא תחילה את רדיוס ההתכנסות):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n+5}{3^n(4n^2+n)}} = \frac{1}{3}$$

לכן רדיוס ההתכנסות הוא 3.

נבדוק את ההתכנסות בקצוות:

עבור $x=3$ נקבל את הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+5}{4n^2+n}$. הטור חיובי,

ניתן להשתמש במבחן השוואה השני.

הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+5}{4n^2+n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+5n}{4n^2+n} = \frac{1}{4}$$

הטורים חברים.

הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+5}{4n^2+n}$ מתבדר

עבור $x=-3$ נקבל את הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+5)}{4n^2+n}$

הטור הוא טור מתחלף כאשר $a_n=\frac{n+5}{4n^2+n}$.

סדרה יורדת ובנוסף מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

לכן: משפט לייבניץ הטור מתכנס.

תחום ההתכנסות הוא: $-3 \le x < 3$

ב)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{8^n\sqrt{n}}(x-2)^{3n}$$

פתרון: (נמצא תחילה את רדיוס ההתכנסות ולכן

רדיוס ההתכנסות הוא 2 לכן הטור מתכנס כאשר

$$|x-2|<2 \Leftarrow 0<x<4$$

נבדוק את ההתכנסות בקצוות:

עבור $X=4$ נקבל $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$, לכל $3\le n$

מתקיים $\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ · הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ מתבדר

לכן גם הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ מתבדר.

עבור $X=0$ נקבל $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$

הטור הזה טור מתחלף כאשר $a_n=\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$. (נשים

לב ש $\lim_{n\to\infty} a_n=0$,

נוכיח ש a_n סופו יורד.

$$f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \Leftarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x}-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} \Leftarrow$$

$$\Leftarrow f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}.$$

לכל $e^2<X$ הנגזרת שלילית הפונקציה יורדת

ז"א לכל $n\ge 9$ הסדרה $a_n=\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ יורדת

אזי משפט לייבניץ מתקיים (הטור מתכנס.

אזור ההתכנסות הוא: $0\le X<4$

3. מהו אזור ההתכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X^n}{n^2\cdot 2^n}$?

פתרון:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{n^2 2^n}\right)}{\left(\frac{1}{(n+1)^2 2^{n+1}}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 2^{n+1}}{n^2 2^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\cdot 2=2$$

לכן $\rho=2$

$X=2$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2\cdot 2^n}=\sum\frac{1}{n^2}<\infty$

$X=-2$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n^2\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow$ מתכנס

ב.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^{2n}$$

<u>פתרון:</u> בעצם ניתן לרשום:

$$\begin{cases} a_{2n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \\ a_{2n+1}=0 \end{cases}$$

(נשתמש ב"קושי הדמר")

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{a_{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2}{2n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{1/2}=\sqrt{e}$$

לכן רדיוס ההתכנסות $\rho=\frac{1}{\sqrt{e}}$

הטור מתכנס ב- $|x|<\frac{1}{\sqrt{e}}$ ומתבדר ב- $|x|>\frac{1}{\sqrt{e}}$

נותר קצוות (כל צד בנפרד):

$x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ (נציב את המספר לפי איבר כללי:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{e^n}$$

(נחשב את ה- ln של הביטוי הזה:

$$\ln\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}\right]=n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-n=$$

$$=n^2\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right]=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

(כדי לחשב גבול זה $n\to\infty$, נחשב את הגבול כללי יותר:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{1}{1+x}-1\right)}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{(1+x)2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{(1+x)\cdot 2}=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}=e^{\ln\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}\right]}\longrightarrow e^{-\frac{1}{2}}\neq 0$$

איבר כללי של הטור אינו שואף לאפס ולכן מתבדר.

תזכורת: טור חזקות סביב x_0 הוא טור מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, נאמר ש- f ניתנת לפיתוח בתחום- $A\subseteq dom\, f$ לטור חזקות סביב x_0 אם מתקיים:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

לכל $x\in A$

משפט: (רציפות של טור חזקות). יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R>0$. אזי הפונק' $f:(-R,R)\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ היא פונק' רציפה ב- $(-R,R)$.

משפט: (אינטגרציה איבר - איבר)

יהי $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R>0$. אזי לכל $x\in(-R,R)$ מתקיים:

$$\int_0^x f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n}x^n$$

התכנסות הטור הימני הוא חלק מהטענה.

בפרט כל פונק' קדומה של f ב $(-R,R)$ גם כן ניתנת להצגה כטור חזקות בעל רדיוס התכנסות R.

משפט: (גזירה איבר-איבר של טור חזקות)

יהי $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R>0$. אזי f גזירה בכל נקודה $x\in(-R,R)$ ומתקיים:

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

בפרט פונק' הנגזרת של f מוגדרת ב $(-R,R)$ היא גם כן טור חזקות בעל רדיוס התכנסות R.

פיתוח פונק' לטור חזקות

אם ל- f יש פיתוח לטור $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ אז f גזירה ב $(-\rho,\rho)$ מספר כלשהו פעמים

ז"א $f^{(k)}(0)=a_k\cdot k! \Rightarrow a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ כלומר המקדמים (הפיתוח יחיד)

~~$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n} = e^{\ln\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}\right]} \to e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$$~~

~~איבר כללי של הטור אינו שואף לאפס ולכן מתבדרת~~

<u>פיתוח פונקציה לטור חזקות</u>

אם ל-f יש פיתוח לטור $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

אזי f גזירה ב $(-\rho,\rho)$ מספר כלשהו של פעמים

וד"ך $f^{(k)}(0)=a_k\cdot k! \Longrightarrow a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, כלומר מקדמי

הטור יחידים!

<u>משפט (נוסף)</u>: אם f גזירה אינ-סוף ב $[-r,r]$

ו- $|f^{(k)}(x)|\le M$ לכל $k\in\mathbb{N}$ ולכל $x\in[-r,r]$

אזי $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ (טור מקלורן)

<u>דוגמה:</u>

נחשב את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ בתחום ההתכנסות!

כלומר $\begin{cases} a_{2n}=0 \\ a_{2n-1}=\frac{1}{2n-1} \end{cases}$ ונמצא רדיוס התכנסות:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[2n]{\left(\frac{1}{2n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1$$

כי לפתרון סע' 2ב'.

$\Downarrow$

$\rho=1$

נבדוק עבור $x=\pm1$ וזה מתבדר ל $x=\pm1$!

~~(שימוש במשפט הדוך (אין לבסס) מתכנס ב $(-1,1)$)~~

~~שלב ראשי~~

אנו רוצים לחשב $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

(נוס לגזור טור זה ולא תלוי להגיע בצורה ידועה:

$S(x)$ שלנו גזיר איבר-איבר ב $|x|<1$ ולפי

משפט

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)' \underset{\text{גזירה איבר-איבר}}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)x^{2n-2}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=$$

$$=\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{x^2}\frac{x^2}{(1-x^2)}=\frac{1}{1-x^2}$$

$X=2$: $\sum \frac{2^n}{n^2\cdot 2^n} = \sum \frac{1}{n^2} < \infty$

$X=-2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2\cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow$ מתכנס!

ב. $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^{2n}$$

פתרון: כמקודם ניתן לרשום:

$$\begin{cases} a_{2n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \\ a_{2n+1} = 0 \end{cases}$$

(שאלמש ס"ד דומי -- נצמר"

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[2n]{a_{2n}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2}{2n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{1/2} = \sqrt{e}$$

לכן רדיוס התכנסות $\rho = \frac{1}{\sqrt{e}}$

התכנסות ל- $|x| < \frac{1}{\sqrt{e}}$ והתבדרות $|x| > \frac{1}{\sqrt{e}}$

ונבדוק קצוות (נקודות בקצה):

$X = \frac{1}{\sqrt{e}}$ נקבל טור מספרים עם איבר כללי:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{e^n}$$

(נסתכל על - ln של הביטוי הזה:

$$\ln\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}\right] = n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n =$$

$$= n^2\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right] = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

((רוצים לחשב גבול כש $n\to\infty$. נחשב את הפונ'

כלל לופי'

$$\lim_{X\to 0^+} \frac{\ln(1+X) - X}{X^2} = \lim_{X\to 0^+} \frac{\left(\frac{1}{1+X} - 1\right)}{2X} = \lim_{X\to 0^+} \frac{-X}{(1+X)2X} =$$

$$= \lim_{X\to 0^+} \frac{-1}{(1+X)\cdot 2} = -\frac{1}{2}$$

③ כלומר, קיבלנו: $S'(x)=\frac{1}{1-x^2}$ ולכן נוכל למצוא את $S(x)$:

$$S(x)=S(x)-S(0)\underset{\Downarrow}{=}\int_0^x S'(x)\,dt=\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt=$$

המשפט היסודי

S' של

$$=\frac{1}{2}\int_0^x\left[\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right]dt=\frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+t}{1-t}\right]\Big|_0^x$$

$$S(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

כלומר:
$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)}$$

ג. תרגיל: חשבו סכום

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$$

פתרון: נסתכל על $\sum n^2x^n$ ונציב בה $x=\frac{1}{2}$

האם סופי? נבדוק את רדיוס ההתכנסות:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[2n]{n^2}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,n^{1/n}=1\Rightarrow \rho=1$$

לפי קושי: לכל נקודה. ולכן תחום ההתכנסות $|x|<1$

נסמן: $S(x)=\sum n^2x^n$. זו פונקציה רציפה, לפי

משפט ב $(-1,1)$ ולכן אינטגרבילית ויש לנו

התכנסות במ"ש ב ~~$(-1,1)$~~ על תת סגור ב-S, כלל

תת קטע סגור בתחום ההתכנסות ולכן ניתן לבצע אינטגרציה

איבר - איבר;

$$S(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$$

נסמן $G(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$, ולכן:

$$\int_0^x G(t)\,dt=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^2t^{n-1}\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n^2t^{n-1}\,dt=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n^2\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$

כמו לפני

$H(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\Leftarrow$ לפי מה שראינו

התכנסות במ"ש ב-S ~~...~~ ולכן (עם 0):

$$\int_0^x H(t)\,dt=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}\,dt\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$$

נגזור את $H \Leftarrow$ נגזור את S.

$$H(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{(1-x) - x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$G(x) = (x\cdot H(x))' = \left[\frac{x}{(1-x)^2}\right]' = \frac{(1-x)^2 - x\,2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} =$$

$$= \frac{(1-x)\left[(1-x+2x\right]}{(1-x)^4} = \frac{1-x^2}{(1-x)^4}$$

ומכאן:

$$S(x) = x(G(x)) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

סיום סעיף

פיתוח של פונקציה לטור

ידוע ש- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ש- $|x|<1$

ומכאן שנציב את (נציב) $x=-t^2$ ונקבל:

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}$$

וטור מתכנס ש- $|t|<1$

מותר לבצע אינטגרציה איבר - איבר ונקבל:

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}\right) dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \qquad |x|<1$$

כמו כן, יש לנו התכנסות של טור עבור $x=1$ ב- (לפי אבל)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} (\arctan x) = \frac{\pi}{4}$$

ולכן סכום הטור!

שאלה: (8) חשבו את סכום הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)3^n} = \frac{3}{2}+3\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

פתרון: נסתכל על הטור:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}x^n$$

בתחום $\left[\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right]$ הטור מתכנס (נוסח-

לסכומו (מאחר כיוון קטע בו $x=\frac{1}{3}$)

ידוע כי

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$$

במ"ש בתחום הנזכר.

ולכן:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n \, dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} = -\ln(1-x)$$

כלומר

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\ln(1-x)$$

ולכן:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n = -\frac{\ln(1-x)}{x}$$

כעת נסתכל בטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^{n-1}$$

הוא מתכנס במ"ש בקטע הנזכר ולכן:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^{n-1} = -\left(\frac{\ln(1-x)}{x}\right)' = -\frac{-\frac{x}{1-x}-\ln(1-x)}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{(1-x)x} + \frac{\ln(1-x)}{x^2}$$

כלומר:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \frac{1}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x}$$

ולכן:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)3^n} = \frac{3}{2} + 3\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$