נכתב על ידי נועם יערי

הגדרה

פונקציה ממשית פירושו פונקציה $f: A \to \mathbb{R}$ כאשר $A \subseteq \mathbb{R}$ כלשהו.

הגדרה

סביבה מנוקבת של נקודה $a \in \mathbb{R}$ היא קבוצה מהצורה $(a-\delta, a+\delta) \backslash \{a\}$ לאיזשהו $\delta > 0$.

$$(= \{x: a-\delta < x < a+\delta\}_{x \neq a} = \{x: 0 < |x-a| < \delta\})$$

הגדרה

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ ו-f פונקציה ממשית כך ש-a **נקודת הצטברות** של $dom(f)$ (בכל סביבה מנוקבת של a יש נקודה מ-$dom(f)$).

נכתוב $\boldsymbol{f(x)} \underset{\boldsymbol{x \to a}}{\to} \boldsymbol{b}$ (או $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$) אם:

לכל $\epsilon > 0$ יש סביבה מנוקבת של a כך ש-$|f(x) - b| < \epsilon$ לכל x מהסביבה המנוקבת שנמצאת בתחום של f.

בפירוט: לכל $\epsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך ש-$|f(x) - b| < \epsilon$ לכל x בתחום המקיים $0 < |x-a| < \delta$

דוגמה

$$\lim_{x \to 3}(2x+1) = \boxed{7}$$

יהי $\epsilon > 0$. נחפש $\delta > 0$ כדרוש בהגדרה, כלומר $|(2x+1) - 7| < \epsilon$ עבור $0 < |x-3| < \delta$.

$$|(2x+1) - 7| = |2x - 6| = 2\underbrace{|x-3|}_{<\delta} < 2\delta \overset{\text{מספיק}}{\leq} \epsilon$$

ניקח למשל $\delta := \frac{\epsilon}{2}$

דוגמה

$$\lim_{x \to 3}(2x+1) = \boxed{7} \Leftarrow f(x) := \begin{cases} 2x+1, & x \neq 3 \\ 1000, & x = 3 \end{cases}$$

גם אם $f(x)$ לא הייתה מוגדרת כלל עבור $x = 3$, עדיין $\lim\limits_{x \to 3}(2x+1) = \boxed{7}$.

תרגיל

עבור a נקודת הצטברות של $dom(f)$:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow$ לכל $\epsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך ש-

$|f(a+h) - b| < \epsilon$ לכל $0 < |h| < \delta$, כך ש- $a + h \in dom(f)$.

נכתב על ידי נועם יערי

משפט (ניסוח הגבול על ידי היינה)

$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow a$ נקודת הצטברות של $dom(f)$ ולכל סדרה $\overbrace{a_n}^{\in dom(f)} \to a$ מתקיים $a \neq$ $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = b$.

הוכחה

$\boxed{\Leftarrow}$

תהי $\overbrace{a_n}^{\in dom(f)} \to a$ $a \neq$. נוכיח $f(a_n) \to b$: יהי $\epsilon > 0$. מהנתון, יש $\delta > 0$ כך ש-
$|f(x) - b| < \epsilon$ כאשר $0 < |x - a| < \delta$ (ו- x בתחום).
$a_n \to a$, לכן יש N כך ש- $|a_n - a| < \delta$ לכל $N \leq n$.
לכל $N \geq n$: $|a_n - a| < \delta$ $\underbrace{\leq}_{a_n \neq a}$ 0. מהפסקה הקודמת, $|f(a_n) - b| < \epsilon$.

$\boxed{\Rightarrow}$

נניח בשלילה $\lim_{x\to a} f(x) \neq b$. זאת אומרת: קיים $\epsilon > 0$, כך שלכל $\delta > 0$, קיים x בתחום כך ש-
$0 < |x - a| < \delta$ ועדיין $|f(x) - b| \geq \epsilon$. לכל n, עבור $\delta = \frac{1}{n}$, קיים a_n בתחום המקיים $\overbrace{0}^{\to 0} <$

$\overbrace{\frac{1}{n}}^{\to 0} < \underbrace{|a_n - a|}_{\text{לפי סנדוויץ'} \to 0}$ לכן $a \neq a_n \to a$

$\epsilon \leq |f(a_n) - b| \Leftarrow$ אבל $f(a_n) \nrightarrow b$ בסתירה.

■

מסקנה

אם $\lim_{x\to a} f(x)$ קיים, אז הוא יחיד.

הוכחה

נניח $b_1 \overset{x\to a}{\leftarrow} f(x)$, $b_2 \overset{x\to a}{\rightarrow} f(x)$. תהי $a \neq a_n \to a$ סדרה בתחום.

מהמשפט, $b_1 \overset{n\to\infty}{\leftarrow} f(a_n) \overset{n\to\infty}{\rightarrow} b_2$, מיחידות הצגת גבול הסדרה נובע ש-$b_1 = b_2$.

■

נכתב על ידי נועם יערי

הערה

אם a נקודת הצטברות של $dom(f)$, אז יש סדרה $a \neq a_n \to a$ בתחום.

(לכל $\delta := \frac{1}{n}$, יש $a_n \in \left(a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}\right) \setminus \{a\}$. $\overbrace{a-\frac{1}{n}}^{\to a} < \underbrace{|a_n - a|}_{\text{לפי סנדוויץ'} \to a} < \overbrace{a+\frac{1}{n}}^{\to a}$.)

מסקנה

הסיבות האפשריות לאי קיום גבול $\lim_{x\to a} f(x)$ (כאשר a נקודת הצטברות של $dom(f)$):

א. יש בתחום סדרה $a \neq a_n \to a$ כך שהגבול $\lim_{n\to\infty} f(a_n)$ אינו קיים.

ב. יש בתחום סדרות $a \neq a_n, a'_n \to a$ כך שהגבולות $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} (a'_n)$.

תרגיל

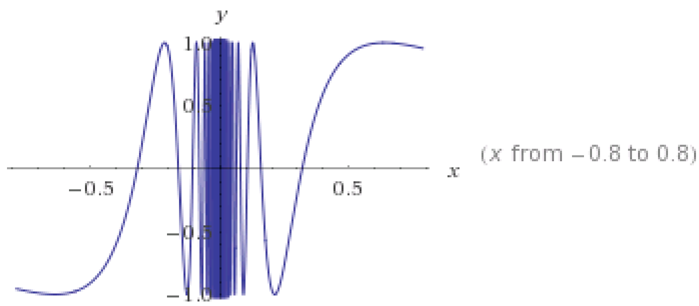
(א) הנ"ל $\Leftrightarrow$ אי קיום הגבול $\lim_{x\to a} f(x)$. (למעשה, ב⇐א).

דוגמאות

$\lim_{x\to 0}(\sin\frac{1}{x})$ אינו קיים.

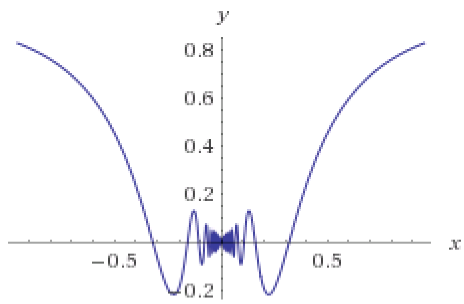
ניקח סדרות a_n, a'_n כך ש-$\frac{1}{a_n} = 2\pi n$, $\frac{1}{a'_n} = 2\pi n + \frac{\pi}{2}$

$a_n := \frac{1}{2\pi n}$, $a'_n := \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$



נכתב על ידי נועם יערי

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$$



(x from −1 to 1)

לכל סדרה $0\neq a_n\to 0$.

$$0\le\left|a_n\sin\left(\frac{1}{a_n}\right)\right|=|a_n|\cdot|\sin\frac{1}{a_n}|\le|a_n|\to 0$$

$\Leftarrow a_n\sin\frac{1}{a_n}\to 0$. מהניסוח בלשון הסדרות, (היינה), $xsin\frac{1}{x}\underset{x\to 0}{\to}0$.

$$[x]\coloneqq\max\{k\in\mathbb{Z}:k\le x\}$$
$$[\pi]=3$$
$$[3]=3$$
$$[2.9999]=2$$

גרף-

לכל $[x]\underset{x\to a}{\to}[a]$

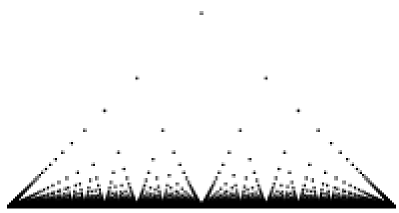
עבור $a\in\mathbb{Z}$, $\lim_{x\to a}[x]$ לא קיים: ניקח $a_n\nearrow a\swarrow a'_n$.

דוגמת דיריכלה: $f(x) \coloneqq \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

ל-f אין גבול באף נקודה a, כי לכל a יש סדרה

$q_{n\in\mathbb{Q}} \to a$ (ואז $f(q_n) = 0 \to 0$), ויש סדרה $r_{n\notin\mathbb{Q}} \to a$ (ואז $f(r_n) = 1 \to 1$).

דוגמת הפופקורן:



$f(x) := \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \text{ מצומצם} \end{cases}$.

לכל a, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.