בס"ד

מבחן במתמטיקה בדידה תשע"ג סמסטר קיץ מועד א

מרצים: מר ארז שיינר וד"ר אפי כהן.

משך המבחן: שלוש שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט וראש פתוח.

הוראות הפעלה:

יש לענות **בפירוט** על כל חמשת השאלות, **כל תשובה מופיעה במקומה בשאלון**. המחברות משמשות לטיוטה בלבד, **ולא יבדקו**.

שימו לב: כל שאלה שווה 23 נקודות, לכן יש סה"כ **115** נקודות.

שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	

ציון:

בהצלחה

ענו בפירוט בדף זה

שאלה 1

<u>סעיף א (12 נק')</u>

תהיינה A,B קבוצות.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

i. $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$.

ii. $P(A)\cup P(B)=P(A\cup B)$.

iii. $P(A\Delta B)\neq P(A)\Delta P(B)$

<u>סעיף ב (11 נק')</u>

תהי $f:X\to Y$ פונקציה. ותהיינה $A,B\subseteq Y$, $C,D\subseteq X$ קבוצות.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

i. $f^{-1}\left[A\cup B\right]=f^{-1}\left[A\right]\cup f^{-1}\left[B\right]$.

ii. $f^{-1}\left[A^c\right]=\left(f^{-1}[A]\right)^c$.

iii. $f\left[C\setminus D\right]=f\left[C\right]\setminus f\left[D\right]$.

פתרון

<u>סעיף א</u>

i. נכון

נניח ש $C\in P\left(A\right)\cup P\left(B\right)$ על פי הגדרת האיחוד נקבל ש $C\in P\left(A\right)\vee C\in P\left(B\right)$.

אם $C\in P\left(A\right)$ מהגדרת קבוצת החזקה נקבל ש $C\subseteq A$.

$A\subseteq A\cup B$ ולכן $C\subseteq A\cup B$. מהגדרת קבוצת החזקה נקבל ש $C\in P\left(A\cup B\right)$.

אם $C\in P\left(B\right)$ מהגדרת קבוצת החזקה נקבל ש $C\subseteq B$.

$B\subseteq A\cup B$ ולכן $C\subseteq A\cup B$. מהגדרת קבוצת החזקה נקבל ש $C\in P\left(A\cup B\right)$.

ii. לא נכון

דוגמא נגדית:

$A\cup B=\{1,2\}\Leftarrow A=\{1\},B=\{2\}$

$P\left(A\right)\cup P\left(B\right)=\{\phi,\{1\},\{2\}\}\Leftarrow P\left(A\right)=\{\phi,\{1\}\},P\left(B\right)=\{\phi,\{2\}\}$

$P\left(A\right)\cup P\left(B\right)\neq P\left(A\cup B\right)\Leftarrow P\left(A\cup B\right)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

iii. נכון

מכיוון ש $\phi \subseteq A\Delta B$ נקבל מהגדרת קבוצת החזקה ש $\phi \in P(A\Delta B)$.

מכיוון ש $\phi \subseteq A, \phi \subseteq B$ נקבל ש

$\phi \notin P(A)\Delta P(B) \Leftarrow \phi \in P(A)\cup P(B), \phi \in P(A)\cap P(B) \Leftarrow \phi \in P(A), \phi \in P(B)$

קיבלנו שמצד אחד $\phi \in P(A\Delta B)$ ומצד שני $\phi \notin P(A)\Delta P(B)$.

<u>סעיף ב</u>

i. נכון

נוכיח ע"י הכלה דו כיוונית. נניח ש $x \in f^{-1}[A\cup B]$ ז"א קיים $y \in A\cup B$ כך ש $f(x)=y$.

אם $y \in A$ אז $x \in f^{-1}[A]$ ואם $y \in B$ אז $x \in f^{-1}[B]$. סה"כ $x \in f^{-1}[A]\cup f^{-1}[B]$.

נניח ש $x \in f^{-1}[A]\cup f^{-1}[B]$ ז"א $x \in f^{-1}[A] \vee x \in f^{-1}[B]$.

אם $x \in f^{-1}[A]$ אז קיים $y \in A$ כך ש $f(x)=y$ ואז $y \in A\cup B$ ו $x \in f^{-1}[A\cup B]$.

אם $x \in f^{-1}[B]$ אז קיים $y \in B$ כך ש $f(x)=y$ ואז $y \in A\cup B$ ו $x \in f^{-1}[A\cup B]$

ii. נכון

נוכיח ע"י הכלה דו כיוונית. נניח ש $x \in f^{-1}\left[A^c\right]$ ז"א קיים $y \in Y \setminus A$ כך ש $f(x)=y$. אם $x \in f^{-1}[A]$ אז קיים $z \in A$ כך ש $f(x)=z$.

מכיוון ש $z \in A$ ו $y \in Y \setminus A$ נקבל ש $z \neq y$ בסתירה לכך ש f פונקציה ואז $x \in \left(f^{-1}[A]\right)^C \Leftarrow x \notin f^{-1}[A]$.

נניח ש $x \in \left(f^{-1}[A]\right)^C$ ז"א $x \notin f^{-1}[A]$. מכיוון ש f פונקציה קיים $y \in Y$ כך ש $f(x)=y$. $x \notin f^{-1}[A]$ ולכן $y \notin A$ ואז $y \in Y \setminus A$ ז"א $x \in f^{-1}\left[A^c\right]$.

iii. לא נכון

$f: X \to Y \quad X=\{1,2\}, Y=\{3\} \quad f(1)=f(2)=3$.

נסמן $C=\{1\}, D=\{2\}$ ואז $f[C]\setminus f[D]=\phi \Leftarrow f[C]=\{3\}, f[D]=\{3\}$.

$f[C\setminus D]=\{3\} \Leftarrow C\setminus D=\{1\}$.

ענו בפירוט בדף זה

שאלה 2

<u>סעיף א (8 נק')</u>

בכל אחד מהסעיפים הבאים, קבעו אם עוצמת הקבוצה היא סופית, אינסופית בת מניה או אינסופית שאינה בת מניה.

i. קבוצת הסדרות האינסופיות של מספרים טבעיים בהם לכל n טבעי, סכום האיברים הנמצאים במקומות $n,n+1,n+2,n+3,n+4,n+5,n+6$ הוא 21.

ii. קבוצת הסדרות הבינאריות האינסופיות בהן כל האחדות נמצאות ברצף (צמודות זו לזו).
למשל, הסדרות הבאות שייכות לקבוצה זו:
0000011111111111000000.......
00000000111111111111........
0000000000000000..................

<u>סעיף ב (15 נק')</u>

תהיי A קבוצה כלשהי. הוכיחו ש $|A| \neq |P(A)|$.

פתרון

<u>סעיף א</u>

i. מספר סופי

על פי הנתון $\sum_{i=1}^{7} a_i = 21$ מספר האפשרויות לפתרון המשוואה הנ"ל כאשר $a_i \in \mathbb{N}$ הוא סופי. נשים לב ש $a_1 = a_{7n-6}, a_2 = a_{7n-5}, \dots, a_7 = a_{7n}$.
קיבלנו ששבעת המספרים הראשונים קובעים את הסדרה ולכן מספר הסדרות הוא כמספר הפתרונות למשוואה והוא סופי.

ii. האיברים בקבוצה הם משלושה סוגים:

- איבר בו הספרה 1 לא מופיעה: האיבר 000000000000
- איברים בהם הספרה 1 מופיעה מספר סופי של פעמים:
  0000011111100000.......
- איברים בהם הספרה 1 מופיעה אינסוף פעמים:
  00000111111.......

הסוג הראשון מורכב מאיבר יחיד.

נחשב את עוצמת קבוצת האיברים מכל אחד מהסוגים האחרים.

איברים בהם הספרה 1 מופיעה מספר סופי של פעמים נקבעים באופן יחיד ע"י שני גורמים:

א. ההופעה הראשונה של הספרה 1.
ב. אורך השרשרת של 1-ים.

לכן, ניתן להגדיר פונקציה חח"ע ועל $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ לקבוצה זו. לכן עוצמתה היא $\aleph_0$.

איברים בהם הספרה 1 מופיעה אינסוף פעמים נקבעים באופן יחיד ע"י גורם יחיד:

- ההופעה הראשונה של הספרה 1.

לכן, קיימת פונקציה חח"ע ועל מהטבעיים אל קבוצה זו. (המעבירה מספר טבעי לשרשרת שבה החל מהמספר הזה כולם אחדים ולפני כן כולם אפסים)
לכן, העוצמה היא $\aleph_0$.
סה"כ עוצמת הקבוצה המתוארת היא $\aleph_0$.

<u>סעיף ב</u>

נוכיח שלא קיימת פונקציה מ A על $P(A)$.
תהיי $f:A\to P(A)$ אז לכל $a\in A$ נקבל ש $f(a)\subseteq A$.
קיימות שתי אפשרויות: אפשרות 1: $a\in f(a)$ אפשרות 2: $a\notin f(a)$.
תהיי $B=\{a\in A | a\notin f(a)\}$. נניח שקיים $b\in A$ כך ש $f(b)=B$.
אם $b\in B$ נקבל לפי הגדרת B ש $b\notin f(b)$ בסתירה לכך ש $f(b)=B$.
אם $b\notin B$ נקבל מהגדרת B ש $b\in f(b)$ בסתירה לכך ש $f(b)=B$.

ענו בפירוט בדף זה

שאלה 3

<u>סעיף א (23 נק')</u>

תהי (A,R) קבוצה סדורה חלקית, ויהיו $a,b\in A$ שני איברים של A שאינם ניתנים להשוואה (כלומר $(a,b)\notin R$ וגם $(b,a)\notin R$).
נגדיר את קבוצת הזוגות הסדורים הבאה: $S=\{(c,d)\in A\times A | bRd \wedge cRa\}$.
נגדיר $T=S\cup R$, הוכיחו ש T הוא יחס סדר חלקי על A.

פתרון

נוכיח ש T הוא יחס סדר חלקי.
רפלקסיבי:
יהי $x\in A$ מכיוון ש (A,R) קבוצה סדורה חלקית, נקבל ש R רפלקסיבי ואז $(x,x)\in R$ מכיוון ש $T=S\cup R$ נקבל ש $(x,x)\in T$.
טרנזיטיבי:
נניח ש $(x,y),(y,z)\in T$ צריך להוכיח ש $(x,z)\in T$.
אם $(x,y),(y,z)\in R$ מכיוון ש R טרנזיטיבי נקבל ש $(x,z)\in R$ ואז $(x,z)\in T$.
נניח ש $(x,y),(y,z)\in S$.
מכיוון ש $(y,z)\in S$ נקבל ש $(b,z)\in R,(y,a)\in R$.
מכיוון ש $(x,y)\in S$ נקבל ש $(b,y)\in R,(x,a)\in R$.
מכיוון ש $(x,a)\in R\wedge(b,z)\in R$ נקבל ש $(x,z)\in S$ ואז $(x,z)\in T$.
נניח ש $(x,y)\in R,(y,z)\in S$.
מכיוון ש $(y,z)\in S$ נקבל ש $(b,z)\in R,(y,a)\in R$.
מכיוון ש R טרנזיטיבי ו $(x,y)\in R$, $(y,a)\in R$ נקבל ש $(x,a)\in R$.
מכיוון ש $(x,a)\in R$ ו $(b,z)\in R$ נקבל ש $(x,z)\in S$ ואז $(x,z)\in T$.
נניח ש $(x,y)\in S,(y,z)\in R$.
מכיוון ש $(x,y)\in S$ נקבל ש $(b,y)\in R,(x,a)\in R$ ואז $(b,z)\in R$ ז"א $(x,z)\in S$ ואז $(x,z)\in T$.
אנטי סימטרי
נניח ש $(x,y),(y,x)\in T$. צריך להוכיח ש $x=y$.
אם $(x,y),(y,x)\in R$ מכיוון ש R יחס אנטי סימטרי נקבל ש $x=y$.

אם $(x,y),(y,x)\in S$.

מכיוון ש $(y,x)\in S$ נקבל ש $(b,x)\in R,(y,a)\in R$.

מכיוון ש $(x,y)\in S$ נקבל ש $(b,y)\in R,(x,a)\in R$.

קיבלנו מהטרנזיטיביות של R ש $(b,a)\in R$ וזו סתירה.

אם $(x,y)\in R,(y,x)\in S$.

מכיוון ש $(y,x)\in S$ נקבל ש $(b,x)\in R,(y,a)\in R$.

מהטרנזיטיביות של R נקבל ש $(b,y)\in R,(x,a)\in R$ ואז $(b,a)\in R$ וזו סתירה.

ענו בפירוט בדף זה

שאלה 4

<u>סעיף א (3 נק')</u>

תהי A קבוצה אינסופית, ויהי $x \notin A$. הוכיחו כי $\left|A \cup \{x\}\right| = |A|$

<u>סעיף ב (20 נק')</u>

תהיינה A, B קבוצות אינסופיות כך ש $A \subseteq B$ וגם $|A| < |B|$. הוכיחו כי קיימת קבוצה $S \subseteq P(B)$ המקיימת את התנאים הבאים:

1. $\forall X \in S : |X| = |A|$
2. $\forall X, Y \in S : X \subseteq Y \vee Y \subseteq X$
3. $|\cup S| > |A|$

פתרון

<u>סעיף א</u>

מכיוון ש $x \notin A$ נקבל ש $A \cap \{x\} = \phi$ ולכן $\left|A \cup \{x\}\right| = |A| + \left|\{x\}\right|$ מכיוון ש A קבוצה אינסופית נקבל ש $|A| + \left|\{x\}\right| = \max\left\{|A|, 1\right\} = |A|$.

<u>סעיף ב</u>

נסמן $T = \left\{X \in P(B) \middle| |X| = |A|\right\}$. $T \neq \phi$ מכיוון ש $A \in T$.

נגדיר יחס סדר על הקבוצה T $X \leq Y \Leftrightarrow X \subseteq Y$.

היחס סדר הנ"ל הוא יחס סדר חלקי.

נניח שלקבוצה T יש איבר מקסימאלי $D \in T$.

מכיוון ש $D \in T$ נקבל ש $|D| = |A| < |B|$. מכיוון ש $D \subseteq B$, $|D| < |B|$ נקבל ש $B \setminus D \neq \phi$. יהי $b \in B \setminus D$ מסעיף א נקבל ש $\left|D \cup \{b\}\right| = |D| = |A|$.

מכיוון ש $b \in B$ ו $D \subseteq B$ נקבל ש $D \cup \{b\} \subseteq B \Rightarrow D \cup \{b\} \in P(B)$.

קיבלנו ש $D \cup \{b\} \in P(B)$, $\left|D \cup \{b\}\right|$ ולכן $D \cup \{b\} \in T$ בסתירה לכך ש D איבר מקסימאלי.

מהלמה של צורן נקבל שקיימת שרשרת $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ללא חסם מלעיל ולכן $\bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha \notin T$ כי אחרת הוא הייה חסם מלעיל של $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$.

מכיוון ש $\bigcup_{\alpha\in I} C_\alpha \notin T$ נקבל ש $\left|\bigcup_{\alpha\in I} C_\alpha\right| \neq |A|$.

$\bigcup_{\alpha\in I} C_\alpha \supseteq C_\alpha \Leftarrow \left|\bigcup_{\alpha\in I} C_\alpha\right| \geq |C_\alpha| = |A|$ סה"כ נקבל ש $\left|\bigcup_{\alpha\in I} C_\alpha\right| > |A|$.

נסמן $S = \left\{\{C_\alpha\}_{\alpha\in I}\right\}$.

נראה ש S מקיימת את כל התכונות.

1. מכיוון שלכל $\alpha \in I$ $C_\alpha \in P(B)$ נקבל ש $S \subseteq P(B)$.
2. מכיוון שלכל $\alpha \in I$ $C_\alpha \in T$ נקבל שלכל $\alpha \in I$ $|C_\alpha| = |A|$.
3. מכיוון ש $\{C_\alpha\}_{\alpha\in I}$ שרשרת נקבל שלכל $\alpha, \beta \in I$ נקבל ש $C_\alpha \subseteq C_\beta \vee C_\beta \subseteq C_\alpha$.
4. מכיוון ש $\left|\bigcup_{\alpha\in I} C_\alpha\right| > |A|$ נקבל ש $|\bigcup S| > |A|$.

דרך שנייה:

נביט באוסף $T=\{D\subseteq P(B)\,|\,\forall X\in D:|X|=|A|,\forall X,Y\in D:X\subseteq Y\vee Y\subseteq X\}$ הסדור ביחס להכלה.

במילים פשוטות, נביט באוסף הקבוצות המקיימות את שני התנאים הראשונים בשאלה.

ברור ש $T\neq\phi$ כיוון ש $\{A\}\in T$.

תהי $C\subseteq T$ שרשרת, נוכיח כי $\bigcup C\in T$. אכן, אם $X\in\bigcup C$ קיים $S_1\in C$ עבורו $X\in S_1$ ולכן $|X|=|A|$ כיוון ש $S_1\in T$.

תהיינה $X,Y\in\bigcup C$ לכן קיימים $S_1,S_2\in C$ כך ש $X\in S_1,Y\in S_2$. כיוון ש C שרשרת, ובלי הגבלת הכלליות, $S_1\subseteq S_2$ ולכן $X,Y\in S_2$. כיוון ש $S_2\in T$ מתקיים $X\subseteq Y\vee Y\subseteq X$.

לכן לפי הלמה של צורן קיימת קבוצה $S\in T$ מקסימאלית ביחס להכלה. נותר להוכיח עבורה את התנאי השלישי, כלומר נותר להוכיח כי $|\bigcup S|>|A|$.

כיוון ש S אינה ריקה (אחרת ברור שהיא לא מקסימלית, הקבוצה הריקה מוכלת ב$\{A\}$), קיימת $X\in S$ כך ש $|X|=|A|$. לכן $X\subseteq\bigcup S$ ולכן $|\bigcup S|\geq|A|$.

נניח בשלילה כי $|\bigcup S|=|A|$, לכן כיוון ש $|B\setminus\bigcup S|+|\bigcup S|=B$ נובע $|B\setminus\bigcup S|=B$.

לכן קיימת $D\subseteq B\setminus\bigcup S$ עבורה $|D|=A$. נביט בקבוצה $S\cup\{\bigcup S\cup D\}$.

כיוון ש $D\subseteq B\setminus\bigcup S$ נובע ש $S\subset S\cup\{\bigcup S\cup D\}$. כמו כן, $|\bigcup S\cup D|=A$, ולכל $X\in S$ מתקיים $X\subseteq\bigcup S\cup D$.

ביחד נובע כי $S\cup\{\bigcup S\cup D\}\in T$ וגדולה ממש מ S בסתירה למקסימאליות של S

ענו בפירוט בדף זה

שאלה 5

<u>סעיף א (10 נק')</u>

בספינה נמצאו 20 ילדים. הילדים לא זוכרים את יום הולדתם ומעוניינים לקבל יום – הולדת (מתוך 365 תאריכים אפשריים בשנה)

i. מה מספר האפשרויות לחלק להם יום הולדת כך שבדיוק שני ילדים יקבלו יום זהה ו – 18 ילדים יקבלו כל אחד יום הולדת משלו (נפרד)? פתרו ונמקו.

ii. מה מספר האפשרויות לחלק להם ימי הולדת כך שיהיה לפחות יום אחד בשנה שאותו יחגגו לפחות שני ילדים? פתרו ונמקו.
(רמז: מה מספר האפשרויות שלא יהיה יום הולדת משותף?)

<u>סעיף ב (13 נק')</u>

נגדיר יחס R על $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ על ידי $fRg \Leftrightarrow \left|\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)\neq g(x)\}\right|<\infty$

i. הוכיחו כי זהו יחס שקילות.

ii. מצאו את העוצמה של קבוצת המנה $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/R\right|$, הוכיחו.

פתרון
<u>סעיף א</u>

i. יש $\binom{20}{2}$ אפשרויות לבחירת הזוג שיקבל את יום ההולדת באותו היום.

אחרי קביעת הילדים שיקבלו את יום ההולדת באותו יום יש לבחור 19 ימים מתוך 365 ימים כאשר הסדר משנה ז"א יש $\frac{365!}{346!}$ אפשרויות לבחירת הימים.

סה"כ מספר האפשרויות הוא $\binom{20}{2}\cdot\frac{365!}{346!}$.

ii. מספר האפשרויות הכולל הוא – לכל ילד יש 365 אפשרויות ולכן 365^{20}.
מספר האפשרויות שלכל הילדים יהיו ימי הולדת שונים הוא $\frac{365!}{345!}$.

סה"כ האפשרויות $365^{20}-\frac{365!}{345!}$

<u>סעיף ב</u>

.i

- רפלקסיבי - $\left|\{x\in\mathbb{R}|\ f(x)\neq f(x)\}\right|=|\phi|=0<\infty$ ולכן fRf .
- סימטרי – נניח ש fRg ז"א $\left|\{x\in\mathbb{R}|\ f(x)\neq g(x)\}\right|<\infty$ ולכן $\left|\{x\in\mathbb{R}|g(x)\neq f(x)\}\right|<\infty$ ואז gRf .
- טרנזיטיבי – נניח ש fRg, gRh ז"א $\left|\{x\in\mathbb{R}|\ f(x)\neq g(x)\}\right|<\infty$, $\left|\{x\in\mathbb{R}|g(x)\neq h(x)\}\right|<\infty$.

נניח ש $x\in\{x\in\mathbb{R}|\ f(x)\neq h(x)\}$ אז או ש $g(x)\neq f(x)$ או ש $g(x)\neq h(x)$ ולכן $x\in\{x\in\mathbb{R}|\ f(x)\neq g(x)\}\cup\{x\in\mathbb{R}|g(x)\neq h(x)\}$ ולכן

$$\{x\in\mathbb{R}|\ f(x)\neq h(x)\}\subseteq\{x\in\mathbb{R}|\ f(x)\neq g(x)\}\cup\{x\in\mathbb{R}|g(x)\neq h(x)\}$$

$$\left|\{x\in\mathbb{R}|\ f(x)\neq h(x)\}\right|\leq\left|\{x\in\mathbb{R}|\ f(x)\neq g(x)\}\right|+\left|\{x\in\mathbb{R}|g(x)\neq h(x)\}\right|<\infty$$

.ii נגדיר $A\subseteq P(\mathbb{R})$ כל תתי הקבוצות הסופיות של הממשיים. לכל $[f]\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/R$ נגדיר פונקציה $F:[f]\to A$ ע"י $F(g)=\{x\in\mathbb{R}|\ f(x)\neq g(x)\}$.

זו העתקה חח"ע ועל. בנוסף, מתקיים $|A|=\aleph$ כי $A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ כאשר A_n תת קבוצה מגודל n .

לכל $n\in\mathbb{N}$ $|A_n|=\aleph$ ולכן $|A|=\left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right|=\aleph$.

$k\cdot\aleph=\left|\bigcup_{[f]\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/R}[f]\right|=\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right|=2^{\aleph}$ כאשר $k=\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/R\right|$ ולכן $k=2^{\aleph}$.