בס"ד

# <u>אינטגרלים משולשים</u>

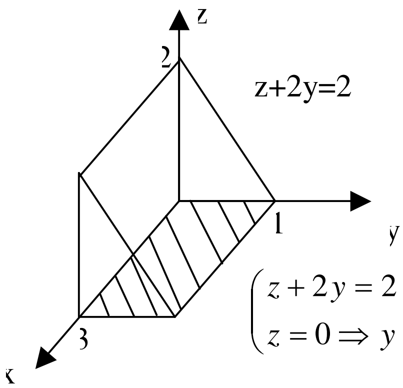
אינטגרל משולש הוא כמו אינטגרל כפול רק ב-3 מימדים.

$$\underbrace{\iiint_V}_{\text{נפח}} \underbrace{f(x,y,z)}_{\text{פונקציה}}\,dV$$

ראה דוגמאות בספר של הבלין 1. עמ' 208
2. עמ' 209

<u>שינוי סדר אינטגרציה</u>

<u>תרגיל:</u>
מצא את נפח המנסרה החסומה ע"י המישורים:
1. z+2y=2
2. x=3
3. z=0, y=0, x=0



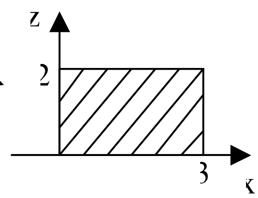

$$\begin{pmatrix} z+2y=2 \\ z=0 \Rightarrow y=1 \end{pmatrix}$$

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dV$$

$$\int_0^3 \overbrace{\int_0^1 \underbrace{\int_0^{2-2y} f(x,y,z)\,dzdy}_{\text{מלבן מעל אלמנט של } dx,dy \text{. (פונ' של } x,y)}\quad dx}^{\text{אלמנט נפח בעובי } dx \text{. פונ' של } x.}$$

אפשר גם להטיל למשל על מישור xz.

$$\underbrace{\int_0^3\int_0^2\int_0^{1-\frac{z}{2}} f(x,y,z)\,dy}_{\text{מלבן מעל אלמנט } dydz}\overbrace{dzdx}$$

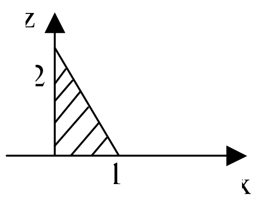


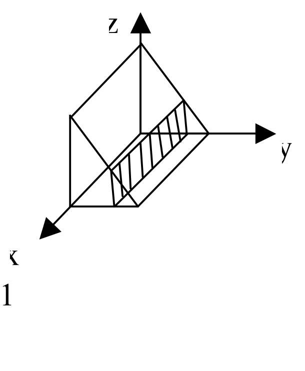

$$z+2y=2$$

$$y=1-\frac{z}{2}$$

או להטיל על מישור yz

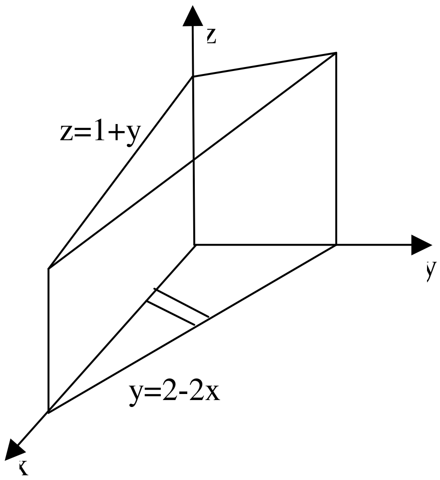
$$\underbrace{\int_0^1\int_0^{2-2y}\int_0^3 f(x,y,z)\,dx}_{\text{פונ' של } y.}\overbrace{dzdy}$$



<u>שאלה:</u>

מצא מהו נפח הצורה מתחת למישור z=1+y,
שתחום ע"י המישורים של הצירים והמישור: 2x+y=2,
בעזרת אינטגרל משולש.




<u>פיתרון:</u>

כל נפח מחולק לאלמנטים בגודל dxdydz.
בהתחלה עושים את האינטגרל מ-0 עד 1+y.

$$V = \iiint_V dxdydz$$

$$\int_0^1 \int_0^{2-2x} \underbrace{\left( \int_0^{1+y} dz \right)}_{z|_{z=0}^{1+y} = 1+y} dydx = ...$$ ונקבל מה שמצאנו בתרגיל באינטגרלים כפולים.

<u>הערה:</u>
1. אינטגרל <u>כפול</u>- אינטגרציה על שטח dxdy +מידע נוסף (גובה למשל).
2. אינטגרל <u>משולש</u>- אינטגרציה על נפח dxdydz +מידע נוסף (צפיפות, טמפרטורה וכו').

<u>שימושים:</u>
א. נפח: אינטגרל כפול: גובה=f(x,y).
אינטגרל משולש: f(x,y,z)=1.
ב. מסה: אינטגרל משולש: צפיפות=f(x,y,z).

## <u>אינטגרלים משולשים בקורדינטות גליליות</u>

קורדינטות גליליות הן הרחבה של קור' פולריות: $dV = rdzdrd\theta$
כמו בפולריות:

$$r, \theta \leftrightarrow x, y$$

$$z \leftrightarrow z$$

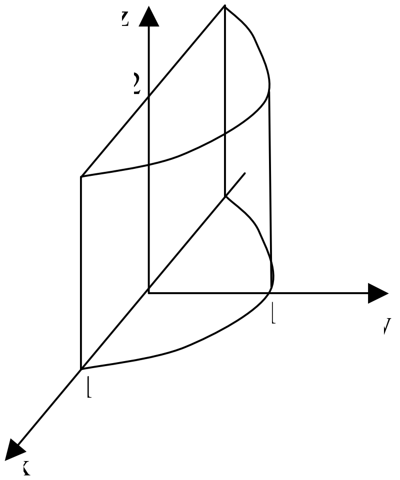
$$dxdydz \rightarrow rdrd\theta dz$$

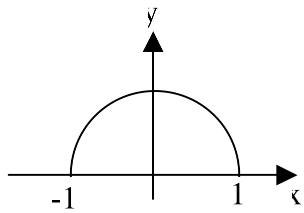
$$\iiint f(r, \theta, z) rdrd\theta dz$$

<u>תרגיל:</u>

חשב: $\iiint x^2 ydV$ כאשר V הוא נפח של חצי גליל, שרדיוסו 1, וגובהו 2.

<u>פיתרון:</u>




$$\iiint x^2 ydV = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=0}^{2} \overbrace{r^2\cos^2\theta}^{x^2}\cdot\overbrace{r\sin\theta}^{y}\overbrace{rdzdrd\theta}^{dV} = 2\int_0^{\pi}\int_0^1 r^4 dr\cos^2\theta\sin\theta d\theta =$$

$$= \frac{2}{5}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta d\theta = \begin{bmatrix} u=\cos\theta & \theta=0 \to u=1 \\ du=-\sin\theta d\theta & \theta=\pi \to u=-1 \end{bmatrix} =$$

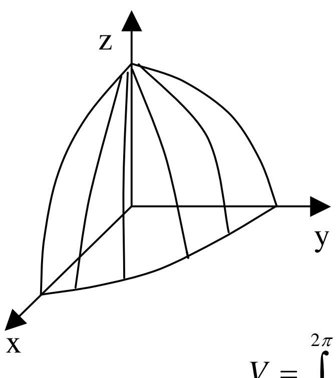
$$= -\frac{2}{5}\int_{-1}^{1}u^2du = -\frac{2}{5}\cdot\frac{u^3}{3}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{4}{15}$$

- דוגמא בספר של הבלין עמ' 212.

<u>תרגיל:</u>

מצא את הנפח הכלוא בין מישור xy למשטח $z=1-x^2-y^2=1-r^2$

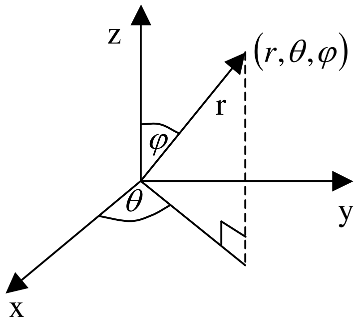
($z=x^2+y^2$ זה פרבולואידה – נהפוך אותה ונעלה אותה ב-1).




$$V = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=0}^{1-r^2} rdzdrd\theta = \dots = \frac{\pi}{2}$$

# <u>אינטגרלים משולשים בקורדינטות כדוריות</u>

## <u>קורדינטות כדוריות:</u>

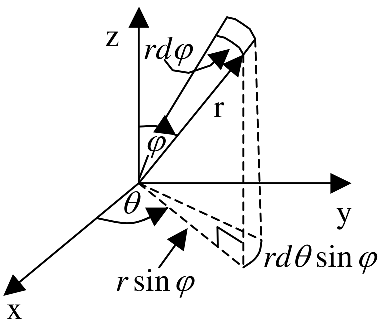



$$x = r\sin\varphi\cos\theta$$
$$y = r\sin\varphi\sin\theta$$
$$z = r\cos\varphi$$

בתחום:

$$0 \le \theta \le 2\pi$$
$$0 \le \varphi \le \pi$$
$$0 \le r \le \infty$$

## <u>הדיפרנציאל dV:</u>

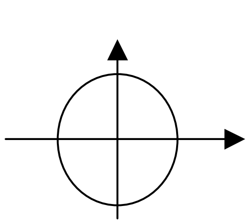



$$dV = rd\varphi\, r\sin\varphi\, d\theta dr = r^2 \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta dr$$

## <u>תרגיל:</u>

צריך לחשב את האינטגרל הבא על נפח של חצי עליון של כדור ברדיוס a:

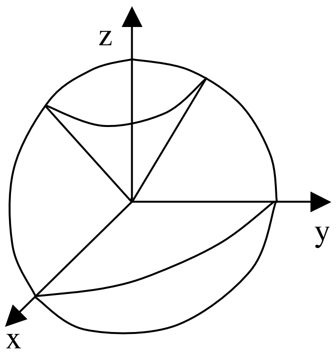
$$\iiint \underbrace{\left(x^2+y^2+z^2\right)}_{r^2} dV$$
$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{a} r^2\, \overbrace{r^2 \sin\varphi\, dr d\varphi\, d\theta}^{dV}$$



<u>תרגיל:</u>

מצא את נפח חיתוך החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ והכדור $x^2+y^2+z^2=4$.

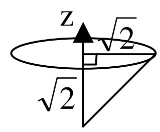
<u>פיתרון:</u>




הגוף הוא חרוט שבסיסו כדורי.

חיתוך החרוט עם הכדור: $z=\sqrt{4-x^2-y^2}=\sqrt{x^2+y^2}$

עקומת החיתוך: $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ z=\sqrt{2} \end{cases}$




$$\tan\varphi=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1 \rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4}$$

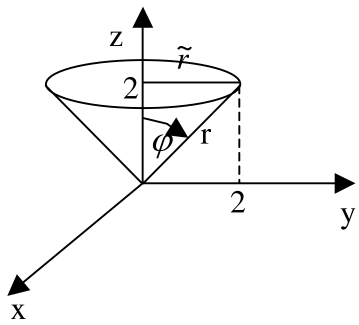
מכאן האינטגרל לחישוב הנפח:

$$V=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{r=0}^{2} r^2\sin\varphi\, dr d\varphi\, d\theta$$

<u>תרגיל:</u>

מצא את נפח החרוט שבסיסו מישור: $\leftarrow$ $\sqrt{x^2+y^2}\le 2$, וגם: $z\le 2$.

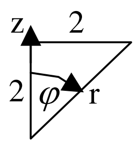
<u>פיתרון:</u>




בקצה:

$$z=2\ ,\ x^2+y^2=4\ ,\ \tilde{r}=2$$

ולכן הזווית:




$$\varphi=\frac{\pi}{4}$$

בנוסף: $\cos\varphi=\frac{2}{r} \rightarrow r=\frac{2}{\cos\varphi}$.

הנפח:

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} r^2\sin\varphi\, dr d\varphi\, d\theta$$

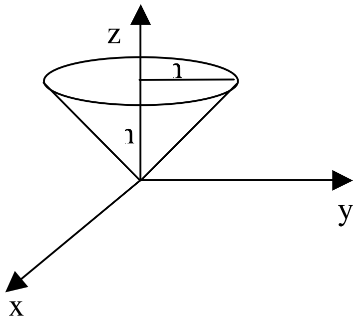
אלמנט נפח מסויים נמצא ברדיוס r, זווית $\theta$, וזווית $\varphi$.

בסוף, במישור, כאשר z=2, אז r משתנה.

- ראה דוגמא נוספת בספר של הבלין- עמ' 220.

## תרגיל:

א. מצא את הגובה של מרכז המסה של הקונוס:
ב. מצא את מומנט האינרציה סביב הציר הראשי.
גובה הקונוס=רדיוס הבסיס.




## פתרון:

וכנ"ל עבור כל קורדינטה בנפרד. $r_{cm} = \dfrac{\sum \rho_i r_i}{\sum \rho_i} \Rightarrow$

נשתמש בקורדינטות גליליות.
משוואת הקונוס היא: r=z בקורדינטות גליליות (כי בכל גובה הרדיוס שווה לגובה).
כדי למצוא את המסה צריך לעשות אינטגרציה: $dM = \rho r dr d\theta dz$:

$$M = \int \rho dV = \rho \int_{z=0}^{h} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{z} r dr d\theta dz = \rho \cdot 2\pi \int_0^h \frac{z^2}{2} dz = \frac{\rho \pi h^3}{3}$$

$$\bar{z} = \rho \int z dV = \rho \int_{z=0}^{h} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{z} z \cdot r dr d\theta dz =$$

$$2\pi \int_{z=0}^{h} \underbrace{\int_{r=0}^{z} \rho z r dr}_{\left.\frac{zr^2}{2}\right|_{r=0}^{z} = \frac{z^3}{2}} dz = 2\pi\rho \int_{z=0}^{h} \frac{z^3}{2} dz = \rho\pi \left.\frac{z^4}{4}\right|_0^h = \frac{\pi h^4}{4} \rho$$

לכן מרכז המסה:

$$z_{cm} = \frac{\rho \int z dV}{\underbrace{\rho \int dV}_{M}} = \frac{\frac{\pi h^4}{4} \rho}{\frac{\rho \pi h^3}{3}} = \frac{3}{4} h$$

מומנט האינרציה ביחס לציר z:

$$I = \int r^2 dM = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^z r^2 \rho r dr d\theta dz = \rho 2\pi \int_0^h \frac{z^4}{4} dz = \rho \frac{\pi h^5}{10} = \frac{3}{10} M h^2$$

$$M = \frac{\rho \pi h^3}{3}$$

תרגיל (חשוב!)

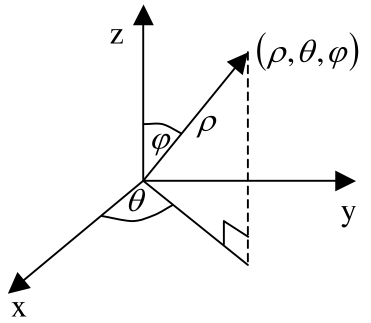
מהי מסתו של כדור שרדיוסו R, אם צפיפות המסה שלו: $\rho = \dfrac{x^2 e^{-\left(x^2+y^2+z^2\right)}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$

פיתרון:

$M = \iiint \rho dxdydz$

(כאן $\rho$ מייצגת צפיפות מסה)

נעבור לקורדינטות כדוריות: (כאן $\rho$ מייצגת את הרדיוס)



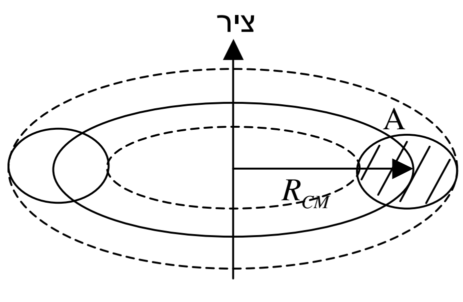

$$x = \rho \sin\varphi \cos\theta$$
$$y = \rho \sin\varphi \sin\theta$$
$$z = \rho \cos\varphi$$
$$dV = \rho^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta d$$

המסה:

$$M = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{r=0}^{R} \frac{\rho^2 \sin^2\varphi \cos^2\theta \cdot e^{-\rho^2}}{\rho^3} \underbrace{\rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta}_{dV}$$
$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{r=0}^{R} \rho \sin^3\varphi \cos^2\theta \cdot e^{-\rho^2} d\rho \, d\varphi \, d\theta$$
$$= \left.\frac{e^{-\rho^2}}{-2}\right|_0^R \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^3\varphi \cos^2\theta \, d\varphi \, d\theta =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(e^{=R^2}-1\right)\int_0^{\pi} \sin^3\varphi \, d\varphi \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = ...$$

## משפט פאפוס (שאום עמ' 184)

אם נקח משטח מישורי דו מימדי סגור בעל שטח A, ונסובב אותו סביב ציר על המישור (שאינו חוצה את המשטח), אזי הנפח המתקבל יהיה מכפלה של:
① השטח A.
② אורך הדרך שעושה מרכז המסה (כלומר: המרכז הגיאומטרי) של המשטח הדו מימדי בסיבוב, כלומר: $2\pi R_{cm}$.



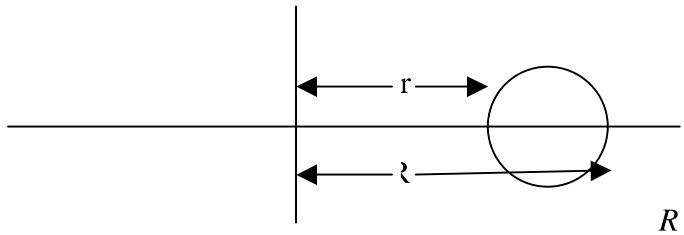

$$\boxed{V = 2\pi R_{CM} \cdot A}$$

הערה: מרכז המסה הנו המרכז הגיאומטרי של הגוף (centraid) אם צפיפותו קבועה.

<u>תרגיל:</u>
מצא נפח טבעת בעלת רדיוס פנימי r ורדיוס חיצוני R.

<u>פיתרון:</u>
בשיעור על חישוב נפחים קבלנו פעם שהנפח הוא: $V=\frac{\pi^2}{4}(R+r)(R-r)^2$.

כעת, נשתמש במשפט פאפוס.




רדיוס החתך: $\frac{R-r}{2}$.

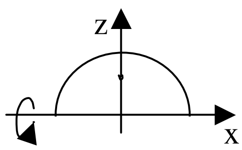
$$V=2\pi R_{CM}\cdot\rho$$
$$=2\pi\left(r+\frac{R-r}{2}\right)\cdot\pi\left(\frac{R-r}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{4}(r+R)(R-r)^2$$

הגענו לנפח בדרך קצת יותר קלה.

<u>תרגיל:</u>
לפי אותה שיטה ניתן גם למצוא מרכז מסה.
דוגמא: מהו מרכז המסה של חצי כדור?

<u>פיתרון:</u>
הנפח הכללי של צורה זו הוא: $\frac{4\pi}{3}a^3$.

מסובבים סביב ציר ה- x.

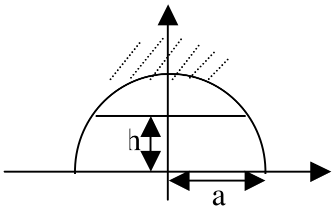



$$V=\underbrace{\frac{4\cancel{\pi}}{3}a^3}_{\text{ידוע}}=\overbrace{\cancel{2}\cancel{\pi}\,\bar{z}}^{\text{הדרך שעושה מרכז המסה בסיבוב סביב ציר x.}}\cdot\underbrace{\left(\frac{\pi a^2}{\cancel{2}}\right)}_{\text{A-שטח חצי העיגול}}$$

מכאן:

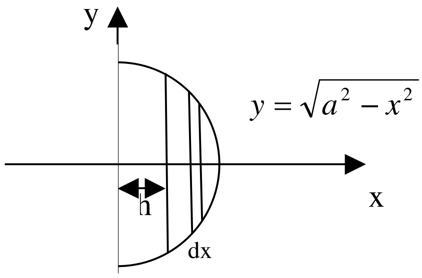
$$4a^3=3\pi a^2\bar{z}\Rightarrow\boxed{\bar{z}=\frac{4a}{3\pi}}$$

<u>שאלה שהופיעה בתרגיל 14:</u>
מהו נפח חלק הכדור מעל למישור בגובה h?



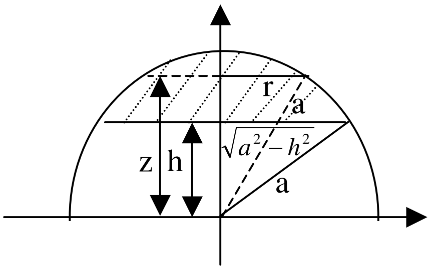

שאלה זו ניתן לפתור בכמה שיטות:

<u>1. נפח גוף סיבוב</u>




$$V=\int_h^a \pi\, y^2 dx = \pi\int_h^a \left(a^2-x^2\right)dx = \pi\left[a^3-\frac{a^3}{3}-a^2h+\frac{h^3}{3}\right]$$
$$=\pi\left[\frac{2a^3}{3}-a^2h+\frac{h^3}{3}\right]$$

<u>2. קורדינטות גליליות</u>

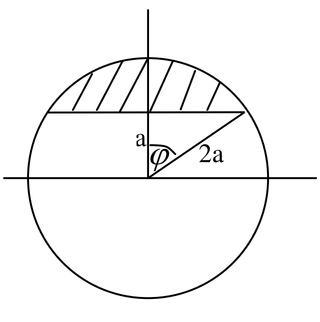



$$\frac{\imath^2-z^2)}{2}dz=\pi\left[a^2z-\frac{z^3}{3}\right]_h^a$$

וכו'...

- שימו לב: תיתכן בעיה עם מינוס.

<u>תרגיל:</u>
נפתור שאלה דומה בקורדינטות כדוריות:
מהי מסת החלק הקטן בין מישור בגובה a לכדור: $x^2+y^2+z^2=4a^2$
כאשר צפיפות המסה נתונה ע"י: $\sigma=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{1}{\rho}$




<u>פיתרון:</u>
משוואת המישור: z=a, ובקורדינטות כדוריות: $z=\rho\cos\varphi$
ולכן: $\rho=\frac{a}{\cos\varphi}$ .

זווית $\varphi$ המקסימלית היא ב- $\rho = 2a$. מכאן:

$$2a = \frac{a}{\cos\varphi} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

המסה: $M = \int \sigma\, dV$. נציב את dV בקורדינטות כדוריות:

$$M = \iiint \underbrace{\sigma}_{\text{צפיפות}} \cdot \underbrace{\rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta}_{dV}$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{3}} \int_{r=\frac{a}{\cos\varphi}}^{2a} \frac{1}{\rho} \cdot \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

ובקורדינטות גליליות, כמו קודם:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$M = \int \sigma\, dV$$

$$M = \iiint \sigma\, r dr d\theta\, dz = \int_{z=a}^{2a} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{4a^2-z^2}} \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}} dr d\theta\, dz$$

- שימו לב: גם כאן יתכן שיש בעיה עם מינוס.

<u>תרגיל:</u>

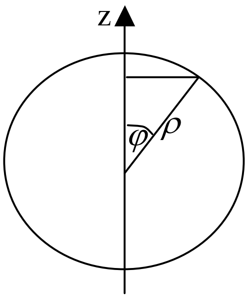
מהו מומנט ההתמד של כדור בעל רדיוס a ביחס לציר העובר במרכז, כאשר צפיפות המסה נתונה ע"י: $\sigma = \frac{\rho^2}{\sin\theta}$

<u>פיתרון:</u>

מומנט התמד: $\sigma_i \to dM$ $\quad I = \frac{\sum r_i^2 \sigma_i}{\sum \sigma_i}$

אלמנט מסה יהיה: $dM = \sigma\, dV$

ומומנט ההתמד: $I = \iiint (\rho\sin\varphi)^2 \cdot dM$ כי המרחק מציר במרכז הוא $\rho\sin\varphi$:




$$I = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=0}^{a} \underbrace{(\rho\sin\varphi)^2}_{r^2} \cdot \underbrace{\frac{\rho^2}{\sin\theta}}_{\sigma} \cdot \underbrace{\rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta}_{dV}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \rho^6 \sin^2\varphi \cdot d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi}\int_0^{a} \rho^6 \sin^2\varphi \cdot d\rho\, d\varphi = ...$$