נכתב על ידי יהונתן רגב

תזכורת

יהי $V_{/\mathbb{F}}$ מרחב מכפלה פנימית $<,>$. יהיו $B,\tilde{B}$ בסיסים ל - V. אזי: $G_{\tilde{B}} = P^t G_B \bar{P}$, כאשר P מטריצת המעבר בין הבסיסים.

הערות

1. אם G_B הפיכה, אזי גם $G_{\tilde{B}}$ הפיכה.

הוכחה

נניח G_B הפיכה. לכן: $\det(G_B) \neq 0$.

$$\det(G_{\tilde{B}}) = \det(P^t G_B \bar{P})$$

$$\det(G_{\tilde{B}}) = \det(P) \cdot \det(G_B) \cdot \overline{\det(P)}$$

$$\det(G_{\tilde{B}}) = \det(G_B) \cdot |\det(P)|^2$$

$$\det(P) \neq 0 \Rightarrow \det(G_{\tilde{B}}) \neq 0$$

לכן: $G_{\tilde{B}}$ הפיכה.

■

2. נניח $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\det(G_B) > 0$. אזי $\det(G_{\tilde{B}}) > 0$.

תכונות של בסיסים אורתונורמליים

1. חישוב הצגה של וקטור נתון:

יהי $v \in \mathbb{V}$. יהי $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של $\mathbb{V}$. נסמן $[v]_B$ את ההצגה של v יחסית לבסיס B: $[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. נניח ש B בסיס אורתונורמלי. אזי $\alpha_i =< v, v_i >_{1 \le i \le n}$.

הוכחה

אם $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$, נכפול (במובן של מכפלה פנימית) ב-v_1, ונקבל:

$$< v, v_1 >=< \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, v_1 >= \alpha_1 \underbrace{< v_1, v_1 >}_{=1} + \dots + \alpha_n \underbrace{< v_n, v_n >}_{=1}$$

■

2. **משפט (פיתגורס)**

יהי B בסיס אורתונורמלי. יהי $v \in V$. נסמן: $[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

אזי: $||v||^2 = |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2$.

הוכחה

$$||v||^2 =< v, v > = < \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n, \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n >$$

$$||v||^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \cdot \bar{\alpha_j} < v_i, v_j > \underbrace{=}_{\substack{<v_i, v_j \geq 1 \\ i \neq j}} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{\alpha_i} \underbrace{< v_i, v_i >}_{=1} = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2$$

■

הערה

אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ו $n = 2$, אז זה משפט פיתגורס קלאסי.

הערה

יש הכללות של משפט זה למקרה כאשר $\dim \mathbb{V} = \infty$.

רמז : אם נתבונן ב- $\mathbb{V} = C[a, b]$ (פונקציות רציפות), מגדירים מכפלה פנימית :

$< f, g >= \int_a^b f(t)g(t)dt$.

הערה

נניח שנתונים שני בסיסים אורתונורמליים של $\mathbb{V}$:

$$B = \{v_1, \cdots, v_n\}, \tilde{B} = \{\widetilde{v_1}, \cdots, \widetilde{v_n}\}$$

אזי :

$$I = G_{\tilde{B}} = P^t \underbrace{G_B}_{=I} \bar{P} = P^t \bar{P}$$

הגדרה

אומרים שמטריצה מרובכת P היא **מטריצה אוניטרית** אם $P \cdot P^* = I$ כאשר $P^* = \overline{P^t}$.

אומרים שמטריצה ממשית P היא **מטריצה אורתוגונלית** אם $P \cdot P^t = I$.

דוגמה

$$\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$$

$$P = \begin{pmatrix} \cos\phi & -sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

$$P^t = \begin{pmatrix} \cos\phi & sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

$$P \cdot P^t = \begin{pmatrix} \cos\phi & -sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\phi & sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

דוגמה

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$P^t = P$$
$$P \cdot P^t = P^2 = I$$

דוגמה

$$P = I$$

משפט

אם $B, \tilde{B}$ בסיסים אורתוגונליים. אזי, מטריצת המעבר P היא מטריצה אוניטרית.

הוכחה

ראינו שמתקיים: $P^t \cdot \bar{P} = I$. נשתמש בשחלוף, ונקבל:

$$(P^t \cdot \bar{P})^t = I^t$$

$$\bar{P}^t \cdot (P^t)^t = I$$

$$P^* \cdot P = I$$

$$\Downarrow$$

$$P \cdot P^* = I$$

■

משפט

תהי P מטריצה אוניטרית. אזי:

- השורות של P מהוות בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$.
- העמודות של P מהוות בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$.

להיפך, אם אחד מהתנאים הנ"ל מתקיים, אזי P אוניטרית.

הוכחה

*הערה: כמכפלה פנימית ב - $\mathbb{F}^n$, משתמשים במכפלה הפנימית הסטנדרטית.

נניח ש P – אוניטרית.

לכן: $P\cdot P^*=I_n$.

נתבונן בשורות של P, נסמנן: $v_1,\cdots,v_n$.

נרצה להוכיח כי: $<v_i,v_k>=\begin{cases}1, i=k\\0, i\neq k\end{cases}$.

נתון: $P\cdot P^*=I_n$.

נשתמש בכפל שורה - שורה:

$$P\cdot P^*=\begin{pmatrix}v_1\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}\cdot P^*$$

$$P\cdot P^*=\begin{pmatrix}v_1\cdot P^*\\\vdots\\v_n\cdot P^*\end{pmatrix}$$

נתבונן בשורה ה - i: $v_i\cdot P^*$.

האיבר ה - k, בשורה זו שווה ל - $\sum_{j=1}^n\alpha_{i,j}\cdot\gamma_{j,k}$, כש - $\alpha_{i,j}$ הינו האיבר ה $-j$ של v_i, ו - $\gamma_{j,k}$ הינו האיבר ה $-j$ של העמודה ה $-k$ של P^*.

אבל, העמודה ה $-k$ של $\overline{(P^t)}=P^*$ שווה לשורה ה $-k$ של $\bar{P}$, ז״א, $\gamma_{j,k}=\overline{\alpha_{k,j}}$.

נקבל שהאיבר ה - i,k של $P\cdot P^*$ שווה ל - $<v_i,v_k> \overset{\text{מכפלה פנימית סטנדרטית}}{\cong} \sum_{j=1}^n\alpha_{i,j}\cdot\overline{\alpha_{j,k}}$.

מצד שני, האיבר הזה שווה לאיבר ה - i,k של I_n ששווה ל - $I_{i,k}=\begin{cases}1, i=k\\0, i\neq k\end{cases}$.

ולכן קיבלנו: $<v_i,v_k>=\begin{cases}1, i=k\\0, i\neq k\end{cases}$.

לעמודות, נשתמש בכפל עמודה – עמודה. נשאיר כתרגיל!

הגדרה

יהי V מרחב מכפלה פנימית. תהי $S\subset V$ קבוצה כלשהי. נגדיר:

$S^\perp=\{w\in V:<v,w>=0\wedge v\in S\}$. קוראים ל - $S^\perp$ **מרחב ניצב** ל - S.

משפט

$S^\perp\subset V$ הוא תת מרחב של V.

הוכחה

$$0 \in S^{\perp}$$

$$\beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2 \in S^{\perp} \Longrightarrow < v, \beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2 > = \overline{\beta_1} \cdot < v, w_1 > + \overline{\beta_2} \cdot < v, w_2 >$$

$$< v, \beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2 >= \overline{\beta_1} \cdot 0 + \overline{\beta_2} \cdot 0 = 0$$

משפט

$$S^{\perp} = \left(span(S)\right)^{\perp}$$

הוכחה

$\boxed{\subseteq}$

יהי $w \in S^{\perp}$. נוכיח ש - $w \in \left(span(S)\right)^{\perp}$. ניקח $v \in span(S)$.

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_k \cdot v_k \ \ , v_i \in S$$

$$< v, w > = < \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_k \cdot v_k, w > = \alpha_1 \cdot < v_1, w > + \cdots + \alpha_k \cdot < v_k, w >$$

$$< v, w >= 0 + \cdots + 0 = 0$$

$\boxed{\supseteq}$

יהי $w \in \left(span(S)\right)^{\perp}$. ז"א: $< v.w > = 0$ לכל $v \in span(S)$. אבל: $S \subset span(S)$, ולכן: $< v, w > = 0$ לכל $v \in S$.

$\blacksquare$