תרגיל 2

להגשה עד 15.11.15

שאלה 1

תהי X קבוצה. נגדיר:

$$\mathbb{A} := \{E \subseteq X\colon\ |E| \le \aleph_0 \text{ or } |E^c| \le \aleph_0\}$$

הוכיחו כי $\mathbb{A}$ אלגברה־σ מעל X.

שאלה 2

נסמן: $\mathbb{R}^\sharp = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ (הישר הממשי המורחב.)

יהיו $\mathbb{D}$ קבוצה צפופה ב $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{S}_1 := \{(a, \infty]\colon\ a \in \mathbb{D}\}$$
$$\mathbb{S}_2 := \{[a, \infty]\colon\ a \in \mathbb{D}\}$$
$$\mathbb{S}_3 := \{[-\infty, b)\colon\ b \in \mathbb{D}\}$$
$$\mathbb{S}_4 := \{[-\infty, b]\colon\ b \in \mathbb{D}\}$$

ולכל $i \in \{1, \ldots, 4\}$ תהי $\mathcal{F}_i$ האלגברה־σ הנוצרת מעל $\mathbb{R}^\sharp$ על ידי $\mathbb{S}_i$.

1. הוכיחו כי:

$$\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_3 \subseteq \mathcal{F}_4 \subseteq \mathcal{F}_1$$

2. תהי: $\mathbb{S} := \{(a, \infty]\colon\ a \in \mathbb{R}\}$. הוכיחו כי:

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}(\mathbb{S}) = \mathbb{B}(\mathbb{R}^\sharp)$$

שאלה 3

יהיו X קבוצה, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{P}(X)$. הראו כי לכל $A \in \mathcal{F}(\mathbb{A})$ קיימת משפחה בת מנייה $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$ כך ש: $A \in \mathcal{F}(\mathbb{B})$.

הדרכה:

1. הראו כי קבוצת הקבוצות ב־ $\mathcal{F}(\mathbb{A})$ המקיימת תכונה זו הינה אלגברה־σ.
2. הראו כי הקבוצות ב־$\mathbb{A}$ מקיימות תכונה זו והסיקו את הנדרש.

בהנאה!