אנליזה מודרנית – תרגול 8

נפתח בשאלה ממבחן (תשס"ט):

1. יהי (X,S) מרחב מדיד.

א. הגדירו פונקציה מדידה על (X,S)

ב. נניח ש- $f:X\to\mathbb{R}$ מדידה (S). הוכיחו כי הפונקציה $f+\sin f$ מדידה (S).

ג. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מדידה לבג (dm), ונניח ש-$f'(x)$ קיים כב"מ (dm). הוכיחו כי $f'(x)$ מדידה (dm).

פתרון:

ב. $f+\sin f$ מדידה כהרכבה של פונקציה רציפה $x\mapsto x+\sin x$ עם הפונקציה המדידה f

לצורך הוכחת סעיף ג' נוכיח טענת עזר:

אם $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מדידה לבג, אזי גם כל הזזה שלה $f(x-c)$ מדידה לבג.

הוכחה:

$\{x\in\mathbb{R}: f(x-c)<\alpha\}=\{y\in\mathbb{R}: f(y)<\alpha\}+c$ וזו מדידה כהזזה של מדידה.

ג. נגדיר $E=\{x\in\mathbb{R}: f'(x) \text{ exists}\}$, ומהנתון $m(E^c)=0$. נגדיר סדרת פונקציות $\{f_n\}$ ע"י $f_n(x)=\dfrac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)}{\frac{1}{n}}$. פשוט לראות שלכל $x\in E$ מוגדרת פונקציית הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ ושווה ל-$f'(x)$. ע"פ הטענה f_n כולן מדידות לבג, כחיסור וחילוק של פונקציות מדידות, ולכן גם פונקציית הגבול שלהן $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ תהיה מדידה לבג. כל זה נכון בקבוצה E , אך מה לגבי E^c? התשובה היא **שלא משנה** כיצד נגדיר את " $f'(x)$ " מחוץ ל- E שכן מדובר בקבוצה ממידה אפס ומידת לבג היא מידה שלמה (היה בתרגיל בית מס' 5).

תרגיל:

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה. האם קיים קטע בו f מונוטונית?

פתרון: התשובה שלילית. באינפי' בונים פונקציות רציפות שאינן גזירות בשום נקודה (למשל פונקציית ויירשטראס).

ניקח את f להיות כזו, לצורך דוגמא נגדית. אילו היה קטע $I\subseteq\mathbb{R}$ שבו f מונו', משפט הגזירה של לבג היה אומר כי f גזירה כב"מ בקטע – אך זה לא ייתכן!

רציפות בהחלט:

הגדרה: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ נקראת רציפה בהחלט אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $\{[a_k,b_k]\}_{k=1}^n$ הם קטעים זרים שסכום אורכם קטן מ- δ אזי $\sum_{k=1}^n\left|f(b_k)-f(a_k)\right|<\varepsilon$.

<u>תרגיל:</u> תהיינה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפות בהחלט ו- c קבוע. הוכיחו:

א. cf רציפה בהחלט.

ב. $f+g$ רציפה בהחלט.

ג. fg רציפה בהחלט.

<u>פתרון:</u>

א. יהי $\varepsilon>0$ ע"פ הגדרת הרציפות בהחלט של f , עם $\varepsilon\mapsto\frac{\varepsilon}{|c|}$ נקבל כי קיים $\delta>0$ כך שאם $\{[a_k,b_k]\}_{k=1}^n$ הם קטעים זרים שסכום אורכם קטן מ- δ אזי $\sum_{k=1}^n\left|f(b_k)-f(a_k)\right|<\frac{\varepsilon}{|c|}$.

עבור אותו δ , בהינתן קטעים $\{[a_k,b_k]\}_{k=1}^n$ עם סכום אורכים קטן מ- δ , נקבל כי

$$\sum_{k=1}^n\left|cf(b_k)-cf(a_k)\right|=\sum_{k=1}^n|c|\left|f(b_k)-f(a_k)\right|=|c|\sum_{k=1}^n\left|f(b_k)-f(a_k)\right|=<|c|\frac{\varepsilon}{|c|}=\varepsilon$$

ב. ע"פ הגדרת הרציפות בהחלט של f , ישנו $\delta_1>0$, כך שאם $\{[a_k,b_k]\}_{k=1}^n$ הם קטעים זרים שסכום אורכם קטן מ- δ_1 אזי $\sum_{k=1}^n\left|f(b_k)-f(a_k)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. ע"פ הרציפות בהחלט של g ישנו $\delta_2>0$, כך שאם $\{[a_k,b_k]\}_{k=1}^n$ הם קטעים זרים שסכום אורכם קטן מ- δ_2 אזי $\sum_{k=1}^n\left|g(b_k)-g(a_k)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. נגדיר $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$ אם $\{[a_k,b_k]\}_{k=1}^n$ הם קטעים זרים שסכום אורכם קטן מ- δ אזי,

$$\sum_{k=1}^n\left|(f+g)(b_k)-(f+g)(a_k)\right|\le\sum_{k=1}^n\left|f(b_k)-f(a_k)\right|+\sum_{k=1}^n\left|g(b_k)-g(a_k)\right|<\varepsilon$$

ג. f,g רציפות בקטע סגור, ולכן חסומות (כלומר $\left|f(x)\right|,\left|g(x)\right|\le M$ לאיזשהו M)

ע"פ הגדרת הרציפות בהחלט (לשתי הפונקציות) ישנו $\delta>0$ כך שאם $\{[a_k,b_k]\}_{k=1}^n$ הם קטעים זרים שסכום אורכם קטן מ- δ אזי $\sum_{k=1}^n\left|f(b_k)-f(a_k)\right|,\sum_{k=1}^n\left|g(b_k)-g(a_k)\right|<\frac{\varepsilon}{2M}$.

עבור אותו δ נקבל:

$$\sum_{k=1}^{n}\left|(fg)(b_k)-(fg)(a_k)\right|=\sum_{k=1}^{n}\left|f(b_k)g(b_k)-f(a_k)g(a_k)-f(b_k)g(a_k)+f(b_k)g(a_k)\right|\le$$
$$\le\sum_{k=1}^{n}\left|f(b_k)\left(g(b_k)-g(a_k)\right)\right|+\sum_{k=1}^{n}\left|g(a_k)\left(f(b_k)-f(a_k)\right)\right|<2M\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon$$

<u>הגדרה:</u> נאמר כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ מקיימת את **תנאי ליפשיץ**, אם יש קבוע L כך שלכל $x,y\in[a,b]$ מתקיים $\left|f(x)-f(y)\right|\le L|x-y|$.

<u>תרגיל:</u>

א. הוכיחו כי אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ מקיימת את תנאי ליפשיץ, אזי היא רציפה בהחלט.

ב. נניח כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ היא ממחלקה C^1 (גזירה ברציפות). הוכיחו כי היא מקיימת את תנאי ליפשיץ.

<u>פתרון:</u>

א. יהי $\varepsilon>0$. נניח כי $\left\{[a_k,b_k]\right\}_{k=1}^{n}$ הם קטעים זרים שסכום אורכם קטן מ- $\delta=\frac{\varepsilon}{L}$, אם כך

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f(b_k)-f(a_k)\right|\le\sum_{k=1}^{n}\left|L|b_k-a_k|\right|<\varepsilon$$

ב. מהנתון f' רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ ולכן חסומה שם ($\left|f'(x)\right|\le M$). יהיו $x,y\in[a,b]$ כלשהם, ע"פ משפט הערך הממוצע של לגראנז' מתקיים
$\left|f(x)-f(y)\right|=\left|f'(\xi)(x-y)\right|=\left|f'(\xi)\right||x-y|\le M|x-y|$ עבור ξ כלשהו בין x ל- y .

וזהו בדיוק תנאי ליפשיץ. (בעתיד נוכיח את ב' עם הנחות מקלות יותר).

<u>תרגיל ממבחן (תשע"א):</u>

2. א. הגדירו פונקציה רציפה בהחלט על קטע ב- $\mathbb{R}$

ב. צטטו את הכללת לבג ל"משפט היסודי של חשבון אינטגרלי" (שני חלקים)

ג. תהי $E\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה מדידה לבג, ותהי I_E האינדיקטור של E. הוכיחו שלכמעט כל $a\in E$ (ביחס למידת לבג) $\lim_{h\to0^+}\frac{1}{2h}\int_{a-h}^{a+h}I_E(x)\,dm=1$

<u>פתרון סעיף ג:</u>

ברור כי I_E אינט' בכל קטע סגור. נגדיר $F(x)=\int_a^{a+x} I_E dm$. ע"פ הכללת לבג למשפט היסודי חלק א', F גזירה כב"מ ו $F'(x)=I_E(x)$ כב"מ. ניתן לרשום את הגבול כך $\lim_{h\to 0^+}\frac{F(a+h)-F(a-h)}{2h}$ וזוהי בדיוק ההגדרה של "הנגזרת הסימטרית" של F בנקודה a. היכן ש- F גזירה, הנגזרת הסימטרית מתלכדת עם הרגילה.

כמעט לכל $a\in E$ $F'(a)=I_E(a)=1$, וכב"מ $\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{2h}\int_{a-h}^{a+h} I_E(x)dm=F'(a)$ ובסה"כ כמעט לכל $a\in E$

$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{2h}\int_{a-h}^{a+h} I_E(x)dm=1$ כנדרש.