תרגול 2 – מד"ר

תרגיל (שאלה ממבחן)

קצת לפני חצות התקבלה גופה של כנראה קרבן רצח, בחדר עם טמפרטורה מבוקרת 21 מעלות.
בחצות הטמפרטורה של הגופה היית 28 מעלות, ושעה אחר כך הטמפרטורה ירדה ל25 מעלות.
בהנחה שהטמפרטורה של הגופה $T(t)$ מתנהגת לפי משוואה דיפר' $T'(t) = k\left(T_0 - T(t)\right)$ כאשר k קבוע וT_0 טמפרטורת החדר,
ובהנחה שבעת הרצח הטמפרטורה של הגופה היית 37 מעלות, מצא את זמן הרצח.

פתרון

נעשה הפרדת משתנים

$$\int \frac{dT(t)}{T(t) - T_0} = -\int kdt$$
$$\ln|T(t) - T_0| = -kt + C$$
$$\Rightarrow T(t) = T_0 + Ce^{-kt}$$

$$T_0 = 21$$
$$T(t) = 21 + Ce^{-kt}$$
$$T(0) = 28 = 21 + C \Rightarrow C = 7$$
$$T(1) = 25 = 21 + 7e^{-k} \Rightarrow k = \ln\frac{7}{4}$$
$$T(t) = 37 \Rightarrow 21 + 7\left(\frac{4}{7}\right)^t = 37$$
$$t = \log_7\frac{16}{7} \approx -1.48$$

כלומר צריך לחסר 1.48 של שעה לפני חצות.

זמן הרצח: $22:31$

משפט קיום ויחידות של מד"ר מסדר ראשון

תהי בעיית התחלה (בעיית קושי)

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

אם בכל סביבה של נקודת ההתחלה פונקציה $f(x,y)$ רציפה, וגם f_y' רציפה, אזי קיים פתרון יחיד שמקיים את תנאי ההתחלה.

תרגיל

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

פתרון

$f(x,y) = \frac{y}{x}$ רציפה לכל $x_0 \neq 0$ וגם $f_y' = \frac{1}{x}$ רציפה לכל (x_0, y_0) כך ש$x_0 \neq 0$. ולכן קיים פתרון יחיד לכל $x_0 \neq 0$

$$\int \frac{dy}{dy} = \int \frac{dx}{x} + c$$

פתרון כללי $y = Cx$

$$y_0(x_0) = y_0 \Rightarrow y_0 = Cx_0 \Rightarrow C = \frac{y_0}{x_0}$$

ניתן לראות כי דרך כל נקודה (x_0,y_0) כאשר $x_0,y_0\neq 0$ יעבור פתרון יחיד $y=\frac{y_0}{x_0}x$, ודרך נקודה $(x_0,0)$ יעבוד פתרון יחיד $y\equiv 0$.

לעומת זאת, דרך כל נקודה $(0,y_0)$ לא יעבוד אף פתרון
ודרך $(0,0)$ יעברו אינסוף נקודות.

משוואות מטיפוס הומוגני ומשוואות שניתן להביא לצורה של משוואה מטיפוס הומוגני

הגדרה

פונקציה ψ נקראת הומוגנית מסדר m אם

$$\psi(tx,ty)=t^m\psi(x,y)$$

הגדרה

משוואה מהצורה $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ נקראת מד"ר הומוגנית אם P,Q הם פונקציות הומוגניות מאותו הסדר.

הערה

מד"ר הומוגנית שמתקבלת $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$ ובאמצעות ההצבה $\begin{cases} t=\frac{y}{x} \\ y=tx \end{cases}$ נהפכת למשוואה פתירה.

דוגמאות

1) $(x^2+2xy)dx+xydy=0$

$$P(x,y)=x^2+2xy\Rightarrow P(tx,ty)=t^2x^2+2t^2xy=t^2P(x,y)$$
$$Q(x,y)=xy\Rightarrow Q(tx,ty)=t^2xy=t^2Q(x,y)$$

לכן פונק' P,Q הן הומוגניות מסדר 2.

נחלק את המשוואה המקורית בx^2dx כדי להביא אותה לצורה $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$.

$$1+2\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)y'=0$$
$$y'=-\frac{1}{\frac{y}{x}}-2$$

נעשה הצבה $y=tx$

$$y'=t'x+t\Rightarrow t'x+t=-\frac{1}{t}-2$$
$$\frac{dt}{dx}x=\frac{-(t+1)^2}{t}$$
$$\int\frac{t}{(t+1)^2}dy=-\int\frac{dx}{x}+C$$
$$\ln|t+1|+\frac{1}{t+1}+\ln|x|=C$$
$$\ln\left|\frac{y}{x}+1\right|+\frac{1}{\frac{y}{x}+1}+\ln|x|=C$$
$$\ln|x+y|+\frac{x}{x+y}=C$$

2) $\left(y+\sqrt{x^2-y^2}\right)dx-xdy=0$

$$P(x,y)=y+\sqrt{x^2-y^2}\Rightarrow P(tx,ty)=ty+\sqrt{t^2x^2-t^2y^2}=t\left(t+\sqrt{x^2-y^2}\right)=tP(x,y)$$
$$Q(x,y)=-x\Rightarrow t(-x)=tQ(x,y)$$

לכן הפונ' הן הומוגניות מסדר 1, נחלק את המשוואה המקורית בxdx ונקבל

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}-y'=0$$
$$y'=\frac{y}{x}+\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

נעשה הצבה $t=\frac{y}{x}$ ונקבל:

$$t'x+t=t+\sqrt{1-t^2}$$
$$t'=\frac{1}{x}\sqrt{1-t^2}$$
$$\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int\frac{dx}{x}+C$$
$$\arcsin\left(\frac{y}{x}\right)=\ln|x|+C$$
$$y=xsin(\ln|x|+c)$$

מד"ר שמובילות למד"ר הומוגנית

מדר מהצורה $y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ כאשר $a_1b_2-b_1a_2\neq 0$ ז"א שהישרים נחתכים, מובאים למד"ר הומוגנית ע"י שימוש בהצבה $x=u+\alpha, y=v+\beta$ כאשר (α,β) נקודת החיתוך של הישרים.

כאשר $a_1b_2-b_1a_2=0$ ההצבה $a_1x+b_1y+c_1=t$ תאפשר הפרדת משתנים.

דוגמאות

1) $(2x+y+1)dx+(x+2y-1)dy=0$

$$\frac{dy}{dy}=y'=-\frac{2x+y+1}{x+2y-1}$$
$$a_1b_2-b_1a_2=\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=3\neq 0$$

נמצא נקודת חיתוך של הישרים:

$$\begin{cases}2x+y-1=0\\2+2y-1=0\end{cases}\Rightarrow \alpha=-1,\beta=1$$

לכן ההצבה $x=u-1, y=v+1$.

$$dx=du, dy=dv$$
$$(2(u-1)+(v+1)+1)du+(u-1+2(v+1)-1)dv=0$$
$$(2u+v)du+(u+2v)dv=0$$
$$P(u,v)=2u+v\Rightarrow P(tu,tv)=2tu+tv=tP(u,v)$$
$$Q(x,y)=u+2v\Rightarrow Q(tu,tv)=tQ(u,v)$$

כלומר Q,P פונ' הומו' מסדר I

$$2+\left(\frac{v}{u}\right)+\left(1+2\left(\frac{v}{u}\right)\right)v'=0$$
$$v'=\frac{-2-\left(\frac{v}{u}\right)}{1+2\left(\frac{v}{u}\right)}$$

נשתמש בהצבה $v=ut$ ונקבל

$$tu' + t = \frac{-2-t}{1+2t}$$
$$\int \frac{1+2t}{2t^2+2t+2}dt = -\int \frac{du}{u} + C$$
$$C = u\sqrt{t^2+t+1}$$

נחזור למשתנה v:

$$C = u\sqrt{\frac{v^2}{u^2} + \frac{v}{u} + 1} = \sqrt{v^2+uv+u^2}$$
$$C^2 = v^2+uv+u^2$$
$$u = x+1, v = y-1$$
$$(x+1)^2 + (x+1)(y-1) + (y-1)^2 = C^2$$
$$x^2+y^2+xy+x-y = C$$

(2

$$(x+y+2)dx + (2x+2y-1)dy = 0$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow t = x+y \Rightarrow y = t-x \Rightarrow dy = dt-dx$$
$$(x+t-x+2)dx + (2x+2t-2x-1)(dt-dx) = 0$$
$$(3-t)dx + (2t-1)dt = 0$$
$$\int \frac{2t-1}{3-t}dt + \int dx = 0$$
$$\int \frac{2t-1}{3-t}dt = \frac{2}{-1}\int \frac{t-\frac{1}{2}}{t-3}dt = -2\int \frac{(t-3)+\frac{5}{2}}{t-3}dt = -2t - 5\ln|t-3| + C$$
$$x - 2t - 5\ln|t-3| = C$$
$$x - 2(y+x) - 5\ln|y+x-3| = C$$

משוואת ברנולי

$$y' = a(x)y + b(x)y^n \quad , \quad n \neq 0,2$$

נחלק את שתי האגפים של המשוואה ב-y^n (בהנחה ש-$y \not\equiv 0$), ונקבל

$$y^{-n}y' = a(x)y^{1-n} + b(x)$$
$$(y^{1-n})' = (1-n)y^{-n}y' \Rightarrow y^{-n}y' = \frac{1}{1-n}(y^{1-n})'$$
$$\frac{1}{1-n}(y^{1-n})' = a(x)y^{1-n} + b(x)$$

ע"י ההצבה $v = y^{1-n}$ נקבל משוואה ליניארית

$$\left(\frac{1}{1-n}\right)v' = a(x)v + b(x)$$
$$\boxed{v' = (1-n)a(x)v + (1-n)b(x)}$$

הערה

$y \equiv 0$ הוא תמיד פתרון של משוואת ברנולי (אם $n > 0$).

תרגיל

$$\frac{dy}{dx} + y = xy^3$$

נכפיל את המשוואה ב-y^{-3} ונקבל:

$$y^{-3}y' + y^{-2} = x$$

$$(y^{-2})' = -2y^{-3}y' \Rightarrow y^{-3}y' = -\frac{1}{2}(y^{-2})'$$

נציב $v = y^{-2}$ ונקבל.

$$-\frac{1}{2}v' + v = x$$
$$v' = 2v - 2x$$
$$v' = 2v \Rightarrow v = ce^{2x}$$

לכן נחפש פתרון מהצורה $v = C(x)e^{2x}$. נציב במשוואה.

$$[C(x)e^{2x}]' = 2C(x)e^{2x} - 2x$$
$$C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x} = 2C(x)e^{2x} - 2x$$
$$C'(x) = -2xe^{-2x}$$
$$C(x) = -2\int xe^{-2x}\,dx = -2\left[x\frac{e^{-2x}}{-2} - \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx\right] = xe^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + C$$

$$v = C(x)e^{2x} = x + \frac{1}{2} + Ce^{2x}$$

נחזור למשתנה המקורי

$$v = y^{-2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{y^2} = x + \frac{1}{2} + ce^{2x} \\ y \equiv 0 \end{cases}$$

3) $y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}$

$$y^{-\frac{1}{2}}y' = \frac{4}{x}y^{\frac{1}{2}} + x$$
$$y^{\frac{1}{2}'} = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y' \Rightarrow y^{-\frac{1}{2}}y' = 2\left(y^{\frac{1}{2}}\right)' \Rightarrow 2\left(y^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{4}{x}\left(y^{\frac{1}{2}}\right) + x$$

נציב $v = y^{\frac{1}{2}}$

$$2v' = \frac{4}{x}v + x$$
$$(*)v' = \frac{2}{x}v + \frac{x}{2}$$

נפתור בשיטת וריאצית הקבוע.

$$v' = \frac{2}{x}v \Rightarrow v = cx^2$$

נחפש פתרון מהצורה $v = C(x)x^2$.

$$C'(x)x^2 + 2xC(x) = \frac{2}{x}C(x)x^2 + \frac{x}{2} \Rightarrow C'^{(x)} = \frac{1}{2x} \Rightarrow C(x) = \ln\left(c\sqrt{x}\right)$$

לפי * הפתרון הכללי הוא

$$v = x^2\ln\left(c\sqrt{x}\right)$$
$$\begin{cases} y = x^4\ln^2 c\sqrt{x} \\ y \equiv 0 \end{cases}$$