טורי פוריה

הגדרה - תהי $f\in E$ (E מרחב לינארי של פונקציות רציפות למקוטעין)

אזי הטור $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

הינו טור פורייה המתאים ל- f.

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,dx \qquad n=0,1,2,\dots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\,dx \qquad n=1,2,\dots$$

וסימון: $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

דוגמה -

$$f(x)=\begin{cases}+1 & 0\le x<\pi\\ -2 & -\pi\le x<0\end{cases}$$

נמצא טור פורייה:

נמצא a_0,a_n,b_n:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}-2\,dx+\int_{0}^{\pi}dx\right)=-1$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}-2\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx\right)=$$

$$=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}-2\sin nx\,dx+\int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos nx}{n}\right)\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos nx}{n}\right)\Big|_{0}^{\pi}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right)-\frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n-1}{n}\right)=\begin{cases}0 & n\in 2\mathbb{N}\\ \frac{1}{\pi}\left(\frac{4}{n}+\frac{2}{n}\right)=\frac{6}{n\pi} & \text{אחרת } n\in 2\mathbb{N}-1\end{cases}$$

ולכן:

$$\boxed{f(x)\sim-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{(2n-1)}\sin(2n-1)}$$

שים לב - חשבו כיצד נראה טור פורייה עבור $f(x)$ זוגית
אי זוגית

תזכורת - נוסחאת אוילר: $e^{\pm inx} = \cos nx \pm i \sin nx$

ולכן טור פורייה מרוכב: $f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$

$$\forall n \in \mathbb{Z}: \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

ולמעשה ניתן להראות שטור פורייה מרוכב שקול
לטור פורייה ממשי.

משפט דיריכלה - תהי $f \in E$ וגזירה, מחזורית 2π
אזי טור פורייה $= f(x)$.

משפט - אם $f \in E$ רציפה וגזירה בקטע $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$
אזי טור פורייה מתכנס במ"ש ל- $f(x)$

עבור קטע כללי $[a,b]$:
~~[illegible]~~ מקדמי פורייה יהיו:

ממשי:

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) dx$$

מרוכב -

$$C_n = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) e^{-i\frac{2n\pi x}{b-a}} dx$$

התמרת פורייה

הגדרה - ~~[illegible]~~
תהי $f \in E$ אינטגרבילית, פונקציה $F: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$:

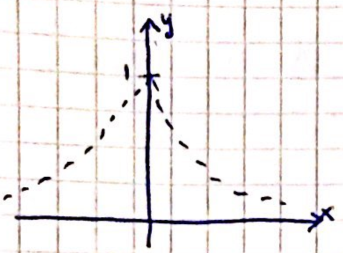
$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

נקראת התמרת פוריה של f.

סימונים - $F(\omega)$, $F[f](\omega)$, $\widehat{f(\omega)}$

תכונות של התמרת פורייה

- $F(\omega)$ מוגדרת לכל $\omega\in\mathbb{R}$
- $F(\omega)$ היא רציפה לכל $\omega\in\mathbb{R}$
- $\lim_{\omega\to\pm\infty} F(\omega)=0$



דוגמא - חשבו התמרת פורייה של: $e^{-|x|}$

פתרון -

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x|}e^{-i\omega x}dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\infty}e^{-x-i\omega x}dx+\int_{-\infty}^{0}e^{x-i\omega x}dx\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\lim_{t\to\infty}\frac{e^{x(-1-i\omega)}}{-1-i\omega}\right)\Bigg|_0^t+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left(\lim_{t\to\infty}\frac{e^{x(1-i\omega)}}{1-i\omega}\right)\Bigg|_{-t}^0=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1+i\omega}+\frac{1}{1-i\omega}\right)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2}{1+\omega^2}=\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$$

סה"כ
$$F[e^{-|x|}](\omega)=\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$$

התמרת פורייה הבדידה - DFT

אם דוגמים ערכים $\{x_0,\dots,x_{n-1}\}$ ומקבלים ערכים של פונקציה רציפה $\{f(x_1),\dots,f(x_n)\}$ אז DFT מוגדרת:

$$X_k(\{x_0,\dots,x_{n-1}\})=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=0}^{n-1}x_j e^{-(2\pi i j\frac{k}{n})}$$

עבור $k=0,\dots,n-1$.

למשל תוצאות ההתמרה היא סדרה של n ערכים

בפרט: $X=\{X_0,\dots,X_{n-1}\}$

דוגמא - נחשב DFT של $\{0,1,1,-1\}$:

$$X_0=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3}x_j e^{-2\pi i j\frac{0}{4}}=\sum x_j\cdot 1=\frac{1}{2}(0+1+1-1)=\frac{1}{2}$$

$$X_1=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3}x_j\cdot e^{-2\pi i j\cdot\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\sum x_j e^{-\frac{\pi i j}{2}}=\frac{1}{2}\Big(0+\underbrace{e^{-\frac{i\pi}{2}}}_{=-i}+\underbrace{e^{-i\pi}}_{=-1}-\underbrace{e^{-i\frac{3}{2}\pi}}_{=i}\Big)=-\frac{1}{2}-i$$

$$X_2=\frac{1}{2}\ ,\quad X_3=-\frac{1}{2}+i$$

וכן הלאה...

הערה - גם במקרה הרציף וגם בבדיד, התמרת פורייה מקיימת:

$$F(ax+by)=aF(x)+bF(y)$$

בנוסף - מכיוון ש- $e^{2\pi i j\frac{k+N}{N}}=e^{2\pi i j\frac{k}{N}}\cdot e^{2\pi i j}=e^{2\pi i j\frac{k}{N}}$

אז $X(k)=X(k+N)$ (N מס' הנקודות (הדגימות))

הגדרה באמצעות מטריצה DFT

ניתן לרשום $X=W\cdot x$ כאשר: $x=\{x_0,\dots,x_{N-1}\}$

$$W_{jk}=\frac{\omega^{jk}}{\sqrt{N}}\ ,\quad \omega=e^{-\frac{2\pi i}{N}}$$

$$\Rightarrow W=\frac{1}{\sqrt{N}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{N-1}\\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \cdots & \omega^{(N-1)(N-1)}\end{pmatrix}$$

למשל עבור $N=4$:

$$\omega=e^{-\frac{2\pi i}{4}}=e^{-\frac{\pi}{2}i}=-i$$

$$\Rightarrow W=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -i & -1 & i\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & i & -1 & -i\end{pmatrix}$$

ואצלנו $x=\{0,1,1,-1\}$ ולכן:

$$X=Wx=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -i & -1 & i\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & i & -1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}-i\\ \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}+i\end{pmatrix}$$

הערה - ב-MATLAB הפקודה dftmtx נותנת את W

Fast Fourier Transform - FFT

אלגוריתם מהיר יותר לחישוב התמרת פורייה בדידה (במקום $O(N^2)$ נקבל $O(N\log N)$ עבור $N=2^k$)

נזכר: עבור N נק' $\{x_0,\dots,x_n\}$: DFT

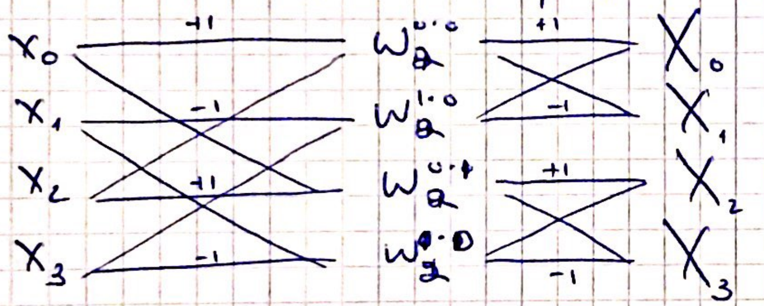
$$X_K=\sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-\frac{2\pi i}{N}jK} = \underbrace{\sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2j} e^{-\frac{2\pi i(2j)K}{N}}}_{\text{זוגיים}} + \underbrace{\sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2j+1} e^{-\frac{2\pi i(2j+1)K}{N}}}_{\text{אי זוגיים}}$$

$$=\sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2j} e^{-\frac{2\pi i}{N/2}jK} + e^{-\frac{2\pi i}{N}K}\sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2j+1} e^{-\frac{2\pi i}{N/2}jK} = \underset{\text{even}}{E_K} + e^{-\frac{2\pi i K}{N}} \underset{\text{Odd}}{O_K}$$

~~ונחשב~~ וכעת נחשב באופן רקורסיבי את E_K, O_K.

ניתן לחשב בעזרת דיאגרמת פרפר:

למשל עבור $N=4$: נסמן $\omega_N=e^{-\frac{2\pi i}{N}}$:



במרכז יופיע $\omega_{\frac{N}{2}}$

ונכפיל ב- ω_N

כלומר:

$$X_0=(x_0+\omega_2^0 x_2)+\omega_4^0(x_1+\omega_2^0 x_3)$$

$$X_1=(x_0+\omega_2^0 x_2)-\omega_4^1(-x_1+x_3\omega_2^0)=(x_0+\omega_2^0 x_2)+\omega_4^1(x_1-x_3\omega_2^0)$$

$$X_2=(x_0+\omega_2^0 x_2)+\omega_4^0(x_1-x_3\omega_2^0)$$

$$X_3=(x_0+x_2\omega_2^0)-\omega_4^1(x_1-x_3\omega_2^0)$$

ונציב $\{0,1,1,-1\}$ לקבל בדיוק את אותן התשובות.

כיצד הרקורסיה עובדת (עבור הקלט):

$$\begin{matrix}x_0\\x_1\\x_2\\x_3\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}\{x_0, x_2\\ \{x_1, x_3\end{matrix}\qquad,\qquad \begin{matrix}x_0\\x_1\\x_2\\x_3\\ \vdots\\x_7\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}\{x_0, x_2, x_4, x_6\\ \{x_1, \dots, x_7\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}\{x_0, x_4\\ \{x_2, x_6\\ \vdots\end{matrix}$$