גאומטריה אלגברית I - פתרון מבחן

מועד ב' - 2010

(1) במרחב $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ נתונות הקבוצות הבאות:

$X = \{w_0w_1 - w_2w_3 = 0\}$

$Y = \{w_0 + w_2 = 0\}$

$Z = \{w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 0\}$

$W_1 = X - Y$

$W_2 = W_1 - (W_1 \cap Z)$

$W_3 = Y \times \mathbb{P}^1$

עבור W_1, W_2, W_3 ענה:

(a) האם יריעה אפינית?

(b) האם יריעה פרויקטיבית?

פתרון:

עבור W_1:

X ו-Y יריעות פרויקטיביות (מוגדרות ע"י פולינום הומוגני). W מוגדר כיריעה פרויקטיבית X פחות hypersurface ($=Y$) לכן W_1 יריעה אפינית. אבל אינו נקודה בודדת ולכן לא יריעה פרויקטיבית.

עבור W_2:

יריעה אפינית (W_1) פחות hypersurface ($W_1 \cap Z$) הינה יריעה אפינית.

עבור W_3:

מכפלה של יריעה אפינית עם יריעה פרויקטיבית - לא זה ~~ולא~~ ולא זה.

(2) מצא את הסגור $\bar{A}$ במרחב $\mathbb{P}^3_{\bar{w}}$ של

הקבוצה $A = \{(x,y,z) : x = z^3 ,\ y = z^5\} \subseteq \mathbb{C}^3_{x,y,z}$

כאשר $\mathbb{C}^3_{x,y,z} = \{\bar{w} \in \mathbb{P}^3_{\bar{w}} : w_0 \neq 0\}$ $\quad x = \frac{w_1}{w_0} \quad y = \frac{w_2}{w_0} \quad z = \frac{w_3}{w_0}$

פתרון:

ראינו בהרצאה על כיסוי אפיני של קבוצה פרויקטיבית שניתן לזהות את $A^\sim$ כתת קבוצה סגורה ב- $\mathbb{P}^n$. (כאשר קובעים שאחד המשתנים w_i שונה מ-0)

במקרה שלנו נזהה את $\mathbb{C}^3_{x,y,z}$ כתת קבוצה סגורה בתוך $\mathbb{P}^3_{\bar{w}}$. לכן, נעביר את קבוצה A להצגה בקואורדינטות הומוגניות בתוך $\mathbb{P}^3$ על מנת למצוא את הסגור.

אם כן, נציב את x,y,z ב: ($w_0 \neq 0$)

$$\left\{ \frac{w_1}{w_0} = \frac{w_3^3}{w_0^3} \ ,\ \frac{w_2}{w_0} = \frac{w_3^5}{w_0^5} \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\left\{ w_1 w_0^2 = w_3^3 \ ,\ w_2 w_0^4 = w_3^5 \right\}$$

- לבסוף, זה הסגור.

(3) לא בחומר של הבחינה.

(4) נתבונן בשתי העתקות רציונליות φ ו- ψ,

מהקבוצה $X = \{w_0w_1 - w_2w_3 = 0\}$

ל- $\mathbb{P}^2_k$ ו- $\mathbb{P}^1_k$ בהתאמה.

$$\varphi(w_0,w_1,w_2,w_3) = (w_0,w_2,w_3)$$

$$\psi(w_0,w_1,w_2,w_3) = (w_0,w_2)$$

עבור φ ו- ψ יש לענות על השאלות הבאות:

(a) האם מורפיזם?

(b) האם איזומורפיזם?

(c) האם איזומורפיזם בי-רציונלי?

ההעתקה לא מוגדרת ב- $(0:1:0:0)$ אך יתכן שהחלפה בהעתקה שקולה תפתור את הבעיה

פתרון: עבור φ: נעזר לפני שנענה על השאלות

נמצא את φ^{-1} ונבחן נקודות בעייתיות:

$$\varphi^{-1}(u_0:u_1:u_2) = \left(u_0 : \frac{u_1u_2}{u_0} : u_1 : u_2\right) = (u_0^2 : u_1u_2 : u_0u_1 : u_0u_2)$$

φ^{-1} שולחת את הישר $(0:1:a)$ לנקודה $(0:a:0:0)$

(blow down), לכן φ לא מורפיזם

(לא מוגדרת בנקודה $(0:1:0:0)$) ולכן ודאי

לא איזומורפיזם. (באופן מיידי ניתן היה להראות

ש- φ לא איזומורפיזם מכיוון ששולחת את הישר

$(0:a:1:0)$ לנקודה $(0:1:0)$ — blow down).

φ אכן איזומורפיזם בי-רציונלי (מראינו φ^{-1} רק

שההרכבה בשני הכיוונים תתן את הזהות

בנקודות בהן φ ו- φ^{-1} מוגדרות).

עבור ψ:

$$\psi(w_0:w_1:w_2:w_3) = (w_0:w_2)$$

באופן מ"ג' ניתן לראות שאומנם ψ אינה מוגדרת

ב $(0:1:0:a)$ אבל על X מתקיים

$$w_0w_1 - w_2w_3 = 0 \Rightarrow w_0w_1 = w_2w_3 \Rightarrow \frac{w_0}{w_2} = \frac{w_3}{w_1}$$

ולכן ניתן להחליף את ההעתקה ψ ב- $\tilde{\psi}$ שקולה.

$$\tilde{\psi}(w_0:w_1:w_2:w_3) = (w_3:w_1)$$

וב $\tilde{\psi}$, הנקודות על הישר $(0:1:0:a)$

הולכות לישר $(a:1)$ ולכן ההעתקה מוגדרת בכל

נקודה.

ראינו בהרצאה:

$\bigcap_{\tilde F \approx \tilde G} Z_{\tilde G} = I_F = \phi \Rightarrow$ ψ מורפיזם.

ψ לא איזומורפיזם מכיוון ששולח את הישר:

(aw_0, bw_1, bw_0, aw_1) לנקודה (a,b). לכן גם לא

איזומורפיזם בירציונלי.

לסיכום: ψ מורפיזם, אך לא איזומורפיזם

ולא איזומורפיזם בי-רציונלי.

5 לכל נקודה $\bar{t}\in\mathbb{P}^5_t$ נגדיר Conic : $C_{\bar t}$:

$$C_{\bar t} = \{\bar w \in \mathbb{P}^2_{\bar w} : t_0w_0^2+t_1w_1^2+t_2w_2^2+t_3w_0w_1+t_4w_0w_2+t_5w_1w_2=0\}$$

יהי L קו ישר העובר בין הנקודות $A=(0,1,1)$, $B=(1,2,0)$.

תהי $U\in\mathbb{P}^5_{\bar t}$ קבוצה של כל הנקודות $\bar t$ כך ש

ה Conic C_t מכיל את הישר L.

(a) האם U יריעה פרויקטיבית?

(b) האם U יריעה אפינית?

פתרון: נשתמש בהצגה הפרמטרית של הישר

$$L = \{\bar w = \lambda A + \mu B\}$$

$$w_0 = \mu, \quad w_1 = \lambda + 2\mu, \quad w_2 = \lambda$$

לכן הישר L מוגדר ע"י המשוואה $w_1 = w_2 + 2w_0$

נציב במשוואה המגדירה את ה Conic ונקבל:

$$t_0w_0^2 + t_1(w_2+2w_0)^2 + t_2w_2^2 + t_3w_0(w_2+2w_0) + t_4w_0w_2 + t_5(w_2+2w_0)w_2 = 0$$

$$t_0w_0^2+t_1w_2^2+t_1\cdot 2w_0w_2 + t_1\cdot 4w_0^2 + t_2w_2^2 + t_3w_0w_2 + t_3\cdot 2w_0^2 + t_4w_0w_2 + t_5w_2^2 + t_5 2w_0w_2 = 0$$

$$w_0^2(t_0+4t_1+2t_3) + w_0w_2(2t_1+t_3+t_4+2t_5) + w_2^2(t_1+t_2+t_5) = 0$$

משוואה זו מתקיימת כאשר

$$\begin{cases} t_0+4t_1+2t_3=0 \\ 2t_1+t_3+t_4+2t_5=0 \\ t_1+t_2+t_5=0 \end{cases}$$

כלומר:

$$U = \{\bar t \in \mathbb{P}^5_{\bar t} \mid t_0+4t_1+2t_3=0,\ 2t_1+t_3+t_4+2t_5=0,\ t_1+t_2+t_5=0\}$$

קבלנו 3 משוואות הומוגניות $\Leftarrow$ U פרויקטיבית.

U אינה נקודה בודדת ולכן לא אפינית.