הרצאה 5 – אינפי 3

דוגמא

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} \qquad x,y \neq 0$$

נקבע $y \neq 0$

$$\nexists \lim_{x\to 0}\left((x^2+y^2)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right)$$

ולכן אין גבול מחוזרר, אבל יש קיים גבול! $0 \leq |f(x,y)| \leq x^2+y^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

משפט

נניח שקיים

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

אם קיים

$$(\forall x : 0 < |x-x_0| < \delta)\ \lim_{y\to y_0} f(x,y) \coloneqq \varphi(x)$$

אז

$$\exists \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = L$$

הוכחה

נקבע $\epsilon > 0$.

$$\exists \delta > 0 : |x-x_0| < \delta, |y-y_0| < \delta\ , (x,y) \neq (x_0,y_0)$$

אז $|f(x,y) - L| < \frac{\epsilon}{2}$

$$y \to y_0 \Rightarrow |\varphi(x) - L| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$
$$0 < |x-x_0| < \delta$$

ואז לפי הגדרה של גבול $\exists \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = L$

מבחן קושי של קיום גבול

משפט

$$f: \Omega \to \mathbb{R}^m$$
$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, p \in Lim\Omega$$

אזי:

$$\exists \lim_{x\to p} f(x) = L \in \mathbb{R}^m \Leftrightarrow$$
$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in \Omega, 0 < \left\| x-p \right\| < \delta, 0 < \left\| x'-p \right\| < \delta : \left\| f(x) - f(x') \right\| < \epsilon$$

קואורדינטות קוטביות (פולריות)

$$n = 2$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \|x, y\|_2$$

$$\varphi = \tan\frac{x}{r} = \arctan\frac{y}{x}$$

דוגמאות

1) $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (x,y) \neq (0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$$

$$|\mathrm{xy}| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$$

$$|f(x,y)| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right| \leq \frac{1}{2}\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2} \to 0$$

ולכן

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

דרך נוספת:

$$x = rcos\varphi, y = rsin\varphi$$

$$|f(x,y)| = \left|\frac{rcos\varphi\ rsin\varphi}{r}\right| \leq r = \sqrt{x^2 + y^2} \to 0$$

2) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

$$f(rcos\varphi, rsin\varphi) = \frac{r^2 cos\varphi\ sin\varphi}{r^2} = \cos\varphi \sin\varphi$$

$$\lim_{r\to 0} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \cos\varphi \sin\varphi$$

תלוי ב-φ, לא מתכנס.

תרגילים

1) $f(x,y) = \left(\sqrt{1 - x^2}, \ln(x^2 - y^2), \sin x \sin y\right)$

$$f: \Omega \to \mathbb{R}^3$$

$$\Omega = \{x, y \in \mathbb{R}^2: |x| > |y|, |x| \leq 1\}$$

2) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{2+x-y}{1+2x^2+3y^2} = \frac{2-1}{1+3} = \frac{1}{4}$

3) $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \left(\frac{x-1}{y-1}, \frac{x^2+x-2}{x-1}\right) = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \left(\frac{x-1}{y-1}, \frac{(x-1)(x+2)}{x-1}\right) = (0,3)$

4) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$

5) $f(x,y) = \frac{3x^2 y}{x^2+y^2} \quad (x,y) \neq 0$

$$|f(x,y)| = \frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{3x^2|y|}{x^2} = 3|y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

$$|f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)| \leq \frac{3r^3|\sin\varphi||\cos\varphi|}{r^2} \leq 3r \to 0$$

6) $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$

$$|f(x,y)| = \frac{|x^3-y^3|}{x^2+y^2} \le \frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2} = \frac{|x|^3}{x^2+y^2} + \frac{|y|^3}{x^2+y^2} \le |x|+|y| \to 0$$

7) $f(x,y) = \frac{x-y}{(x^2+y^2)^\alpha}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$$

$$f(\lambda e_1, \lambda e_2) = \frac{\lambda(e_1-e_2)}{\lambda^{2\alpha}(e_1^2+e_2^2)^\alpha} = \lambda^{1-2\alpha}\frac{e_1-e_2}{(e_1^2+e_2^2)^\alpha} \xrightarrow[\lambda\to 0]{} 0 \Leftrightarrow 1-2\alpha > 0$$

לכן $\exists lim f = L$ אזי $1-2\alpha>0$ כלומר $\alpha<\frac{1}{2}$. אם הגבול קיים אז $L=0$

נניח כי $\alpha<\frac{1}{2}$: $|f(x,y)| = \left|\frac{x-y}{(x^2+y^2)^\alpha}\right| \le \frac{|x|+|y|}{(x^2+y^2)^\alpha} \le \frac{\sqrt{2}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^\alpha} = \sqrt{2}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}-\alpha} \to 0$

כלומר גבול קיים אם"ם $\alpha<\frac{1}{2}$

תזכורת

$$a,b>0 : a+b \le \sqrt{2}(a^2+b^2)$$
$$a+b = 1a+1b = |\langle(1,1),(a,b)\rangle| \le \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

8) $f(x,y) = \frac{x^\alpha y^4}{x^2+y^2}, \quad \alpha>0, (x,y)\ne 0$

$$|f(x,y)| \le \left|\frac{x^\alpha y^4}{y^4}\right| \le |x|^\alpha \to 0$$

פונקציות רציפות ב$\mathbb{R}^n$

הגדרה

$$\Omega \in \mathbb{R}^n, p \in \Omega$$
$$f: \Omega \to \mathbb{R}^m$$

אומרים ש f רציפה בנקודה p אם מתקיים התנאי :

$$\forall\epsilon>0\exists\delta>0 : \ x\in\Omega \ \|x-p\| < \delta \Rightarrow \|f(x)-f(p)\| < \epsilon$$

משפט

אם $p\in\Omega$ אבל $p \notin Lim\Omega$ (מבודדת) אז f תמיד רציפה.

אם $p \in Lim\Omega \cap \Omega$ אז f רציפה בנקודה p אם"ם $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$

תכונות

אם f, g רציפה בנקודה p אזי

1) $\alpha f+\beta g$ רציפות ב-p
2) $\langle f(x), g(x)\rangle$ רציפה בp
3) אם $m=1, g(p)\ne 0$ אזי $\frac{f(x)}{g(x)}$ רציפה
4) $\|f(x)\|$ רציפה

משפט

יהי $\Omega_1 \in \mathbb{R}^n, \Omega_2 \in \mathbb{R}^m$.

$$f: \Omega_1 \to \Omega_2, \quad f: \Omega_2 \to \mathbb{R}^l$$
$$h \coloneqq g \circ f$$

אם f רציפה ב$p \in \mathbb{R}$, $q = f(p) \in \Omega_2$ אזי h נרשמה בp.

דוגמא

רציפות לפי כל משתנה

$$f(x_1, \dots, x_n)$$

$$f\left(x_1^o, \dots, x_{j-1}^o, x_j, \dots, x_n^o\right) \nRightarrow f \text{ רציפה}$$

לדוגמא $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x=y=0 \end{cases}$.

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \nexists$ כלומר לא רציף ב$(0,0)$

אבל f כן רציפה לגבי x, y בנפרד.

$$f(y) = \begin{cases} \frac{x_0 y}{x_0^2+y^2} & x_0^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x_0=y=0 \end{cases}$$

$$\lim_{y\to 0} f(x_0, y) = 0$$

ולכן $\forall x_0$ f רציפה לגבי y.

כנ"ל f רציפה לגבי x.

משפט של $Weierstrass$ על max, min

תהי $K \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה סגורה וחסומה (קומפקטית).

תהי $f: k \to \mathbb{R}$ ונניח שf רציפה על K, אזי

1) f חסומה בקטע
2) קיימות נקודות $x_{min}, x_{max} \in K$ כך ש

$$f(x_{\max}) = \sup_{x\in K} f(x) = \max_{x\in K} f(x)$$
$$f(x_{min}) = \inf_{x\in K} f(x) = \min_{x\in K} f(x)$$