תרגול : אינדוקציה --- פתרונות

1. הוכח את השוויונות הבאים לכל n טבעי בעזרת אינדוקציה:

א. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

ב. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{2n(2n+1)}=\frac{2n}{2n+1}$.

ג. $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$

ד. $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$

ה. $1+2+4+8+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$

ו. $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

ז. $n+(n+1)+(n+2)+\cdots+3n=2n(2n+1)$

פתרון:

א. נוכיח כי $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+.....+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

עבור $n=1$, נקבל $\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

נניח שהשוויון מתקיים עבור n: $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+.....+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$.

נוכיח כי עבור n+1 מתקיים:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+.....+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n+1}{2n+3}$$

אגף שמאל הינו בעצם

$$\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)},$$

ובצמצום נקבל בדיוק את אגף ימין הדרוש.

ב. נוכיח כי: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{2n(2n+1)}=\frac{2n}{2n+1}$

עבור $n=1$, נקבל $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3}$ שזה אכן מתקיים.

נניח שהשוויון מתקיים עבור n: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{2n(2n+1)}=\frac{2n}{2n+1}$.

נוכיח כי עבור n+1 מתקיים:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}=\frac{2n+2}{2n+3}$$

נחשב:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}=$$

$$=\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{2n(2n+1)}\right)+\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}+\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}=$$

$$\overset{(*)}{=}\frac{2n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}+\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}=\frac{2n(2n+2)+1}{(2n+1)(2n+2)}+\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}=$$

$$=\frac{4n^2+4n+1}{(2n+1)(2n+2)}+\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}=\frac{(2n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}+\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}=$$

$$=\frac{2n+1}{2n+2}+\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}=\frac{(2n+1)(2n+3)+1}{(2n+2)(2n+3)}=\frac{4n^2+8n+4}{(2n+2)(2n+3)}=$$

$$=\frac{(2n+2)^2}{(2n+2)(2n+3)}=\frac{2n+2}{2n+3}$$

כאשר בשלב (*) השתמשנו בהנחת האינדוקציה, והוכחנו את הדרוש..

ג. נוכיח כי $1^2-2^2+3^2-4^2+.........+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$**.**

עבור $n=1$, נקבל $1=1$.

נניח שהשוויון מתקיים עבור n: $1^2-2^2+3^2-4^2+.........+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$.

נוכיח כי עבור n+1 מתקיים:

$$1^2-2^2+3^2-4^2+.........+(-1)^{n-1}n^2+(-1)^n(n+1)^2=(-1)^n\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

אגף שמאל הינו בעצם:

$$(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}+(-1)^n(n+1)^2=(-1)^{n-1}(n+1)[\frac{n}{2}+(-1)(n+1)]=$$

$$=(-1)^{n-1}(n+1)[\frac{-n-2}{2}]=(-1)^n(n+1)\frac{n+2}{2}$$

וקבלנו הדרוש.

ד. נוכיח כי $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$

עבור $n=1$ מקבלים: $1^2+2^2=5=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 5$.

נניח נכונות עבור n: $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$.

נוכיח שעבור $n+1$ מתקיים:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2(n+1))^2=\frac{n+1}{3}(2(n+1)+1)(4(n+1)+1)$$

נפתח מצד שמאל ונשתמש בהנחת האינדוקציה:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2(n+1))^2 =$$
$$=1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2n)^2+(2n+1)^2+(2n+2)^2 =$$
$$=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)+(2n+1)^2+(2n+2)^2 =$$
$$=\frac{n}{3}(8n^2+6n+1)+4n^2+4n+1+4n^2+8n+4=$$
$$=\frac{8}{3}n^3+2n^2+\frac{1}{3}n+8n^2+12n+5=\frac{8}{3}n^3+10n^2+(12+\frac{1}{3})n+5=$$
$$=\left(\frac{n+1}{3}\right)(8n^2+22n+15)=\left(\frac{n+1}{3}\right)(2n+3)(4n+5)$$

ה. נוכיח כי $1+2+4+8+...+2^{n-1}=2^n-1$.

עבור $n=1$, נקבל $1=1$.

נניח שהשוויון מתקיים עבור n: $1+2+4+8+...+2^{n-1}=2^n-1$.

נוכיח כי עבור n+1 מתקיים:

$$1+2+4+8+...+2^{n-1}+2^n=2^{n+1}-1$$

על פי הנחת האינדוקציה, אגף שמאל הנו בעצם

$$2^n-1+2^n=2\cdot 2^n-1=2^{n+1}-1,$$

וקבלנו את אגף ימין הדרוש.

ו. נוכיח כי $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

עבור $n=1$, נקבל $1=1$.

נניח שהשוויון מתקיים עבור n: $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

נוכיח כי עבור n+1 מתקיים:

$$1+3+5+\cdots+(2n+1)=(n+1)^2$$

נפתח מצד שמאל ונשתמש בהנחת האינדוקציה:

$$1+3+5+\cdots+(2n+1)=\left(1+3+5+\cdots+(2n-1)\right)+(2n+1)=$$
$$=n^2+(2n+1)=(n+1)^2$$

ז. נוכיח כי $n+(n+1)+(n+2)+\cdots+3n=2n(2n+1)$.

עבור $n=1$, נקבל $1+2+3=6$.

נניח שהשוויון מתקיים עבור n: $n+(n+1)+(n+2)+\cdots+3n=2n(2n+1)$

נוכיח כי עבור n+1 מתקיים: $(n+1)+(n+2)+\cdots+3(n+1)=2(n+1)(2n+3)$

נפתח מצד שמאל ונשתמש בהנחת האינדוקציה:

$$\begin{aligned}&(n+1)+(n+2)+\cdots+3(n+1)=\\&=\left[(n+1)+(n+2)+\cdots+3n\right]+(3n+1)+(3n+2)+(3n+3)=\\&=\left[2n(2n+1)-n\right]+(3n+1)+(3n+2)+(3n+3)=\\&=2n^2+2n-n+9n+6=2n^2+10n+6=2(n^2+5n+3)=2(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

וקבלנו את אגף ימין הדרוש.

2. הוכח באינדוקציה כי עבור כל n **טבעי זוגי** מתקיים:

$$1^2-3^2+5^2-7^2+\cdots+(2n-3)^2-(2n-1)^2=-2n^2$$

פתרון: עבור $n=2$ אנו מקבלים: $1^2-3^2=-8=-2\cdot 2^2$

נניח כעת נכונות עבור n:

$$1^2-3^2+5^2-7^2+.....+(2n-3)^2-(2n-1)^2=-2n^2$$

ונוכיח ל-$n+2$ (כי אנו מוכיחים רק עבור n זוגי):

$$1^2-3^2+5^2-7^2+.....+(2(n+2)-3)^2-(2(n+2)-1)^2=-2(n+2)^2$$

נפתח את צד שמאל ונשתמש בהנחת האינדוקציה:

$$\begin{aligned}&1^2-3^2+5^2-7^2+.....+(2n-3)^2-(2n-1)^2+(2(n+2)-3)^2-(2(n+2)-1)^2=\\&=-2n^2+(2n+1)^2-(2n+3)^2=-2n^2+(4n^2+4n+1)-(4n^2+12n+9)=\\&=-2n^2-8n-8=-2(n^2+4n+4)=-2(n+2)^2\end{aligned}$$

3. מצא את ה-n הקטן ביותר שהחל ממנו אי-השוויון מתקיים, והוכח אותו באינדוקציה:

$$a.\quad 3n-1<2^n \qquad b.\quad n^2+1<3^n \qquad c.\quad 2n^3+1<4^n$$

פתרון:

א. נבדוק עבור איזה n אי-שוויון זה מתחיל להתקיים: עבור $n=1,2,3$ הוא לא מתקיים, אבל עבור $n=4$ מקבלים: $11<16$ ולכן אי-השוויון מתקיים עבור $n\geq 4$.

נניח נכונות אי-השוויון עבור $n>3$: $3n-1<2^n$, ונוכיח ל-$n+1$: צריך להוכיח $3(n+1)-1<2^{n+1}$. נחשב ונשתמש בהנחת האינדוקציה:

$$3(n+1)-1=3n+3-1<2^n+3$$

יש להוכיח שהביטוי בצד ימין קטן מ-$2^n+2^n=2^{n+1}$, וזה תמיד מתקיים כי $3<2^n$ עבור $n\geq 2$

(שכן צד שמאל קבוע וצד ימין גדל).

ב. נוכיח כי $n^2+1<3^n$ **לכל** $n\ge 1$**.**

נשים לב, שכבר עבור $n=1$ אי השוויון מתקיים.

נניח שאי השוויון תקף עבור n: $n^2+1<3^n$, ונוכיח עבור n+1: $(n+1)^2+1<3^{n+1}$.

$$(n+1)^2+1=n^2+2n+2=(n^2+1)+(2n+1)\overset{?}{<}3\cdot 3^n=3^n+2\cdot 3^n.$$

לכן נותר להוכיח כי $2n+1<2\cdot 3^n$.

שוב לפי אינדוקציה, עבור n=1 אי השוויון מתקיים. נניח עבור n: $2n+1<2\cdot 3^n$, ונוכיח עבור n+1:

$$2(n+1)+1<2\cdot 3^{n+1}.$$

אבל

$$2(n+1)+1=(2n+1)+2<6\cdot 3^n=2\cdot 3^n+4\cdot 3^n.$$

על פי T_n, $2n+1<2\cdot 3^n$ ונותר להוכיח כי $2<4\cdot 3^n$. אך אי שוויון זה נכון תמיד

(צד שמאל קבוע, וצד ימין רק גדל).

ג. נבדוק עבור איזה n אי-שוויון זה מתחיל להתקיים: עבור $n=1$ הוא מתקיים אך הוא לא מתקיים עבור $n=2$, ושוב חוזר ומתקיים עבור $n\ge 3$. עבור $n=3$, מתקיים: $55<64$.

נניח שאי השוויון מתקיים עבור n: $2n^3+1<4^n$, ונוכיח עבור n+1 $2(n+1)^3+1<4^{n+1}$:

$$2(n+1)^3+1=2n^3+6n^2+6n+2+1=(2n^3+1)+(6n^2+6n+2)\overset{?}{<}4^{n+1}=4^n+3\cdot 4^n$$

לכן נותר להוכיח כי: $6n^2+6n+2<3\cdot 4^n$.

שוב לפי אינדוקציה, עבור $n=3$, מתקיים: $74<192$. נניח עבור n: $6n^2+6n+2<3\cdot 4^n$, ונוכיח

עבור $n+1$: $6(n+1)^2+6(n+1)+2<3\cdot 4^{n+1}$:

$$6(n+1)^2+6(n+1)+2=(6n^2+12n+6)+(6n+6)+2=$$

$$=(6n^2+6n+2)+(12n+12)\overset{?}{<}3\cdot 4^{n+1}=3\cdot 4^n+9\cdot 4^n$$

נותר אם כן להוכיח: $12n+12<9\cdot 4^n$ או לחלופין: $4n+4<3\cdot 4^n$.

על פי ההנחה, $6n^2+6n+2<3\cdot 4^n$, ולכן מספיק לבדוק מתי מתקיים: $4n+4<6n^2+6n+2$.

אי-שיוויון זה שקול ל- $6n^2+2n-2>0$. השורשים הם: $n_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+48}}{12}=\frac{-2\pm\sqrt{52}}{12}<1$,

ולכן אי-שיוויון זה נכון לכל n טבעי, ומכאן שהוכחנו את טענתנו.

4. א. הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי, $2^{n+1}+5^n$ מתחלק ב-3 ללא שארית.

ב. הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי, 7^n-3^n מתחלק ב-4 ללא שארית.

ג. הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי, $2\cdot 7^n+3\cdot 5^n+7$ מתחלק ב- 12 ללא שארית.

פתרון:

א. נוכיח כי לכל n טבעי, $2^{n+1}+5^n$ מתחלק ב-3 ללא שארית.

עבור $n=1$, $2^{1+1}+5^1=9$ ובוודאי מתחלק ב-3 ללא שארית.

נניח נכונות ל- $n=k$, ז"א נניח ש- $2^{k+1}+5^k$ מתחלק ב-3 ללא שארית, ונוכיח ש-$2^{k+2}+5^{k+1}$ מתחלק ב-3 ללא שארית.

נחשב:

$$2^{k+2}+5^{k+1}=2\cdot 2^{k+1}+5\cdot 5^k=2\cdot 2^{k+1}+2\cdot 5^k+3\cdot 5^k=2(2^{k+1}+5^k)+3\cdot 5^k$$

הגורם השמאלי מתחלק ב-3 בגלל הנחת האינדוקציה, והגורם הימני מתחלק ב-3 כי הוא כפולה של 3,

ולכן בסה"כ הראנו שהביטוי כולו מתחלק ב-3 ללא שארית כדרוש.

ב. נוכיח כי לכל n טבעי, 7^n-3^n מתחלק ב-4 ללא שארית.

עבור $n=1$, $7^1-3^1=4$ ובוודאי מתחלק ב-4 ללא שארית.

נניח נכונות ל- $n=k$, ז"א נניח ש- 7^k-3^k מתחלק ב-4 ללא שארית, ונוכיח ש-$7^{k+1}-3^{k+1}$ מתחלק

ב-4 ללא שארית.

נחשב:

$$7^{k+1}-3^{k+1}=7\cdot 7^k-3\cdot 3^k=4\cdot 7^k+3\cdot 7^k-3\cdot 3^k=4\cdot 7^k+3\cdot(7^k-3^k)$$

הגורם השמאלי מתחלק ב-4 בגלל שהוא כפולה של 4, והגורם הימני מתחלק ב-4 בגלל הנחת

האינדוקציה, ולכן בסה"כ הראנו שהביטוי כולו מתחלק ב-4 ללא שארית כדרוש.

ג. נוכיח כי לכל n טבעי, $2\cdot 7^n+3\cdot 5^n+7$ מתחלק ב- 12 ללא שארית.

עבור $n=1$, $2\cdot 7^1+3\cdot 5^1+7=36$ ובוודאי מתחלק ב-12 ללא שארית.

נניח נכונות ל- $n=k$, ז"א נניח ש- $2\cdot 7^k+3\cdot 5^k+7$ מתחלק ב-12 ללא שארית, ונוכיח

ש- $2\cdot 7^{k+1}+3\cdot 5^{k+1}+7$ מתחלק ב-12 ללא שארית.

נחשב:

$$2\cdot 7^{k+1}+3\cdot 5^{k+1}+7=2\cdot 7\cdot 7^k+3\cdot 5\cdot 5^k+7=14\cdot 7^k+15\cdot 5^k+7=$$
$$=(12+2)\cdot 7^k+(12+3)\cdot 5^k+7=12\cdot 7^k+12\cdot 5^k+(2\cdot 7^k+3\cdot 5^k+7)$$

שני הגורמים השמאליים מתחלקים ב-12 בגלל שהם כפולה של 12, והגורם הימני מתחלק ב-12 בגלל

הנחת האינדוקציה, ולכן בסה"כ הראנו שהביטוי כולו מתחלק ב-12 ללא שארית כדרוש.

5. הוכח באמצעות אינדוקציה שלמה כי כל מספר טבעי הגדול או שווה ל-2 ניתן להיכתב בצורה

$2a+3b$ כאשר a,b טבעיים.

הערה: אינדוקציה שלמה פירושה שבשלב האינדוקטיבי במקום להניח נכונות רק ל- $n=k$, אנו מניחים נכונות **לכל** $n \le k$, ומוכיחים ל- $n=k+1$.

פתרון: ראשית נבדוק את הטענה עבור $n=2,3$: עבור $n=2$, מתקבל $2=1\cdot 2+0\cdot 3$ ועבור $n=3$, מתקבל $2=0\cdot 2+1\cdot 3$
כעת נניח נכונות עבור **כל** $k \le n$ (היינו שלכל k קיימים a,b טבעיים כולל 0, כך ש- $k=2a+3b$; זו הנחת האינדוקציה השלמה) ונוכיח ל- $n+1$ - שאפשר לרושמו כסכום כנ"ל.
נרשום $n+1=(n-1)+2$. על פי הנחת האינדוקציה, אפשר לרשום את $n-1$ כסכום: $n-1=2a+3b$, ולכן גם את $n+1$ נוכל לרשום כסכום:

$$n+1=(n-1)+2=2(a+1)+3b$$

כנדרש.

6. נגדיר באופן רקורסיבי קבוצה $S \subseteq N \times N$ כאשר $N = \{0,1,2,\ldots\}$ ע"י:
בסיס הרקורסיה: $(0,0) \in S$;
כלל הרקורסיה: $\forall (a,b) \in S : (a+1,b+1) \in S \wedge (a,b+1) \in S \wedge (a+2,b+1) \in S$.

1) רשום את איברי S המתקבלים אחרי 3 הפעלות של כלל הרקורסיה.
2) הוכח תוך שימוש באינדוקציה שמתקיים: $\forall (a,b) \in S : a \le 2b$.

פתרון:
1. אחרי הפעלה אחת, נקבל את האיברים:

$$(0,0),(1,1),(0,1),(2,1)$$

אחרי שתי הפעלות, נקבל את האיברים:

$$(0,0),(1,1),(0,1),(2,1),(2,2),(1,2),(3,2),(0,2),(2,3),(4,2)$$

אחרי שלוש הפעלות, נקבל את האיברים:

$$(0,0),(1,1),(0,1),(2,1),(2,2),(1,2),(3,2),(0,2),(2,3),(4,2),$$
$$(3,3),(4,3),(1,3),(5,3),(0,3),(3,4),(2,4),(4,4),(6,3)$$

2. ראשית, נבדוק את בסיס הרקורסיה: האיבר הראשון $(0,0)$ אכן מקיים $0 \le 2\cdot 0$, ולכן בסיס האינדוקציה מתקיים.
כעת נעבור לשלב האינדוקטיבי: בשלב זה אנו מניחים שהזוג (a,b) מקיים את ההנחה $a \le 2b$, ואנו צריכים לבדוק שכל הזוגות הנגזרים ממנו: $(a+1,b+1),(a,b+1),(a+2,b+1)$ גם מקיימים את אותה התכונה:
עבור $(a+1,b+1)$: על פי ההנחה: $a+1 \le 2b+1 < 2(b+1)$, ולכן מקיים את התכונה.
עבור $(a,b+1)$: על פי ההנחה: $a \le 2b < 2(b+1)$, ולכן מקיים את התכונה.
עבור $(a+2,b+1)$: על פי ההנחה: $a+2 \le 2b+2 = 2(b+1)$, ולכן מקיים את התכונה.
ולכן הוכחנו את השלב האינדוקטיבי.
מכאן שהוכחנו באינדוקציה את הטענה שלכל $S \ni (a,b)$ מתקיים $a \le 2b$.

7. הוכח באינדוקציה שסכום הזויות במצולע קמור בעל $n \geq 3$ צלעות (מצולע שכל אלכסוניו נמצאים בתחומו) הוא $180(n-2)$.

תזכורת: המצולע הקטן ביותר הוא משולש וסכום זוויותיו הוא 180.

פתרון:

נוכיח את הטענה באינדוקציה עבור $n \geq 3$.

עבור $n = 3$, אנו מקבלים משולש. על פי התזכורת, סכום זוויותיו הוא 180^0 ומספר זה מקיים: $180(3-2) = 180$ כנדרש.

נניח נכונות ל- $n = k$, ז"א נניח שסכום הזויות במצולע קמור בעל $k \geq 3$ צלעות (מצולע שכל אלכסוניו נמצאים בתחומו) הוא $180^0(n-2)$, ונוכיח שסכום הזויות במצולע קמור בעל $k+1$ צלעות הוא $180(k-1)$.

יהי נתון מצולע קמור בעל $k+1$ צלעות. נעביר אלכסון בין שני קודקודים שבאחד מצידי האלכסון יש רק קודקוד אחד ביניהם. בצורה זו חילקנו את המצולע בעל $k+1$ צלעות לשני מצולעים קמורים: משולש (בצד של האלכסון שבו יש רק קודקוד אחד), ומצולע נוסף בעל k צלעות. נשים לב שסכום הזוויות במצולע המקורי שווה לסכום הזויות בשני המצולעים החדשים שנוצרו. כעת, על פי התזכורת, סכום הזוויות במשולש הוא 180 מעלות, ועל פי הנחת האינדוקציה, סכום הזוויות במצולע בעל k צלעות הוא $180(k-2)$ מעלות. אם נחבר את הסכומים, נקבל:

$$180 + 180(k-2) = 180(k-1)$$

כנדרש.