פתרון תרגיל 3 גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית תשע"ז

1. נביא את התבניות הריבועיות לצורה קנונית.

(א) המטריצה היא: $A = \begin{pmatrix} 6 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 5 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 5 \end{pmatrix}$. נמצא ערכים עצמיים:

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda - 6 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \lambda - 5 & -1 \\ -\sqrt{2} & -1 & \lambda - 5 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - 6)\left((\lambda - 5)^2 - 1\right) + \sqrt{2}\left(-\sqrt{2}(\lambda - 5) - \sqrt{2}\right) - \sqrt{2}\left(\sqrt{2} + \sqrt{2}(\lambda - 5)\right) =$$

$$= (\lambda - 6)\left(\lambda^2 - 10\lambda + 24\right) - 2\left((\lambda - 5) + 1\right) - 2\left(1 + (\lambda - 5)\right) =$$

$$= (\lambda - 6)^2 (\lambda - 4) - 4(\lambda - 4) = (\lambda - 4)\left(\lambda^2 - 12\lambda + 32\right) =$$

$$= (\lambda - 4)^2 (\lambda - 8)$$

הע"ע הם $\lambda = 4, 4, 8$.

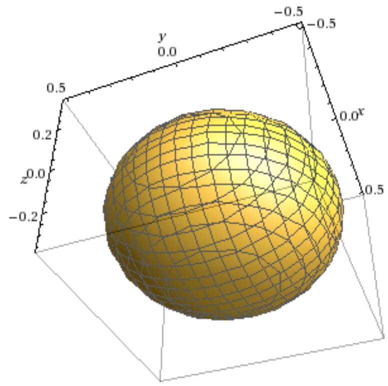
אם נציב $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ כאשר P מטריצה מלכסנת אורתוגונאלית, נקבל:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 1$$

כלומר:

$$4(x')^2 + 4(y')^2 + 8(z')^2 = 1$$

זהו אליפסואיד.



(ב) המטריצה היא: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & -2 & -6 \\ -4 & -6 & -1 \end{pmatrix}$.

הע"ע הם $\lambda = 3, 6, -9$.

אם נציב $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ כאשר P מטריצה מלכסנת אורתוגונאלית,

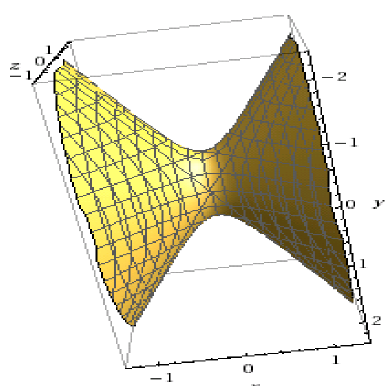
נקבל:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 1$$

כלומר:

$$-9\left(x'\right)^2 + 3\left(y'\right)^2 + 6\left(z'\right)^2 = 1$$

זהו היפרבולואיד חד-יריעתי.



(ג) ראשית נפתח את הביטוי כדי לקבל את ההצגה המוכרת והאהובה:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{4}\left(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz\right)$$

ולכן:

$$\frac{1}{4}\left(x^2+y^2+z^2\right)-\frac{3}{2}\left(xy+xz+yz\right)=0$$

לפיכך, המטריצה היא: $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

הע"ע הם $\lambda=-\frac{5}{4},1,1$.

אם נציב $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ כאשר P מטריצה מלכסנת אורתוגונאלית, נקבל:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=0$$

כלומר:

$$-\frac{5}{4}\left(x'\right)^2+\left(y'\right)^2+\left(z'\right)^2=0$$

זהו חרוט.

(ד) ראשית נפתח את הביטוי כדי לקבל את ההצגה המוכרת והאהובה:

$$2z^2-5xz+z-4xz+10x^2-2x-6yz+15xy-3y=0$$

כלומר:

$$10x^2+2z^2+15xy-9xz-6yz-2x-3y+z=0$$

לפיכך, המטריצה היא: $A=\begin{pmatrix} 10 & \frac{15}{2} & -\frac{9}{2} \\ \frac{15}{2} & 0 & -3 \\ -\frac{9}{2} & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

הע"ע הם $\lambda=\frac{12\pm\sqrt{406}}{2},0$.

מכיוון שיש לנו ביטויים של x,y,z כבודדים, נצטרך למצוא את המטריצה המלכסנת במפורש.

הוקטורים העצמיים המתאימים לע"ע הם: $\begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{15} \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \frac{-82\pm\sqrt{406}}{27} \\ \frac{29\mp2\sqrt{406}}{9} \\ 1 \end{pmatrix}$. אנו צריכים לנרמל אותם:

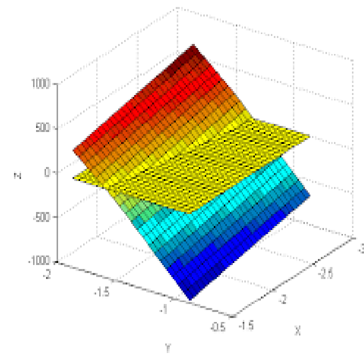
$$\frac{1}{\sqrt{7.8237}}\begin{pmatrix} \frac{-82+\sqrt{406}}{27} \\ \frac{29-2\sqrt{406}}{9} \\ 1 \end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{74.6015}}\begin{pmatrix} \frac{-82-\sqrt{406}}{27} \\ \frac{29+2\sqrt{406}}{9} \\ 1 \end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{1.1644}}\begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{15} \\ 1 \end{pmatrix}$$

אלו עמודות המטריצה המלכסנת P.

אם נציב $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ ונשלים לריבוע נקבל:

$$y^2 = \frac{275 + 12\sqrt{406}}{131} x^2$$

במישור אלו שני ישרים, אך במרחב התלת מימדי אלו שני מישורים.



(ה) המטריצה היא: $A = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$.

הע"ע הם $\lambda = 1, 0, 0$.

הו"ע המתאימים הם: $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

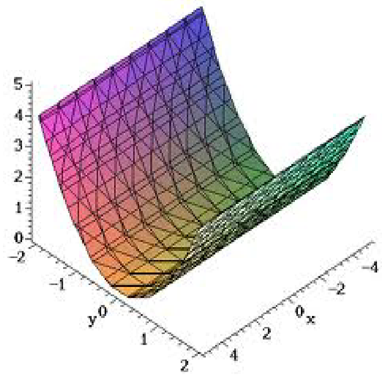
ננרמל אותם ונקבל שהמטריצה המלכסנת היא:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{45}} \end{pmatrix}$$

אם נציב $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ ונשלים לריבוע נקבל:

$$y = x^2$$

במישור זוהי פרבולה; במרחב זהו גליל פרבולי.



(ו) המטריצה היא: $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

הע"ע הם $\lambda = -1, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}$.

אם נציב $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ כאשר P מטריצה מלכסנת אורתוגונאלית, נקבל:

$$-\left(x'\right)^2 - \frac{3}{2}\left(y'\right)^2 - \frac{5}{2}\left(z'\right)^2 = 1$$

זוהי קבוצה ריקה.

2. נשווה את הגרדיאנט ל־0 ונסווג באמצעות ההסיאן.

(א) נשווה $\nabla f = 0$ ונקבל:

$$\begin{cases} f_x = 6x + 3x^2 = 0 \\ f_y = 6y + 4 = 0 \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל $x = 0, -2$ ומהמשוואה השנייה נקבל $y = -\frac{2}{3}$, ולכן הנקודות הן:

$$\left(0, -\frac{2}{3}\right), \left(-2, -\frac{2}{3}\right)$$

ההסיאן היא:

$$H_f = \begin{pmatrix} 6x + 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

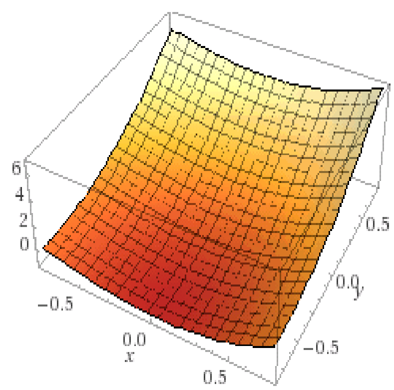
לפיכך:

$$H_f\left(0, -\frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

שני הע"ע חיוביים ולכן זו נקודת מינימום.
באופן דומה:

$$H_f\left(-2, -\frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

לע"ע סימנים שונים ולכן זו נקודת אוכף.
הגרף נראה כך:



(ב) נשווה $\nabla f = 0$ ונקבל:

$$\begin{cases} f_x = -3y + 3x^2 = 0 \\ f_y = -3x + 3y^2 = 0 \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל $y = x^2$. נציב זאת במשוואה השנייה:

$$-3x + 3x^4 = 0$$

ולכן $x = 0, 1$ והנקודות הן:

$$(0,0), (1,1)$$

ההסיאן היא:

$$H_f = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

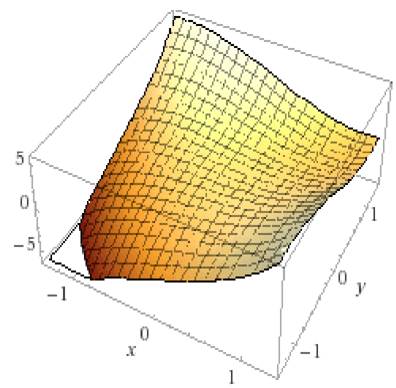
לפיכך:

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

הע"ע שניהם חיוביים ולכן זו נקודת מינימום.
באופן דומה:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

לע"ע סימנים שונים ולכן זו נקודת אוכף.
הגרף נראה כך:



3. נשתמש בנוסחה: $L=\int_a^b\|\alpha'(t)\|\,dt$.

(א) וקטור הנגזרות הוא:

$$\alpha'(t)=\left(-3a\cos^2 t\sin t,3a\sin^2 t\cos t\right)$$

ולכן:

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}dt=3a\cdot\int_0^{2\pi}\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t}dt=$$

לפי הזהות $\sin^2 t+\cos^2 t=1$. לפי הזהות $\sin 2t=2\cos t\sin t$ נקבל:

$$=\frac{3a}{2}\cdot\int_0^{2\pi}|\sin 2t|\,dt=$$

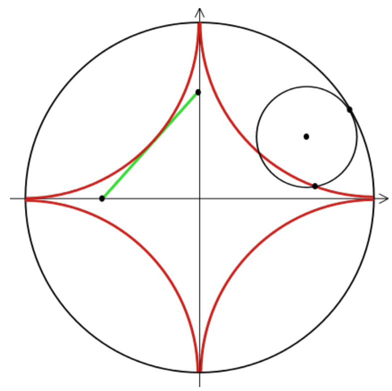
נחלק את האינטגרל לפי תחומי החיוביות והשליליות של $\sin 2t$:

$$=\frac{3a}{2}\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2tdt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\sin 2tdt+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\sin 2tdt+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}-\sin 2tdt\right)$$

כל אחד מהאינטגרלים שווה ל־1, ולכן:

$$L=\frac{3a}{2}\cdot 4=6a$$

עקומה זו נקראת **אסטרואידה.** אסטרואידה מתארת את מסלולה של נקודה קבועה על גבי מעגל המתגלגל (ללא החלקה) בתוך מעגל אחר בעל רדיוס גדול פי 4 מרדיוס המעגל הפנימי.



(ב) וקטור הנגזרות הוא:

$$\alpha'(t) = (-2a\sin t - 2a\sin 2t, 2a\cos t - 2a\cos 2t)$$

לכן:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2\sin^2 t + 8a^2\sin t\sin 2t + 4a^2\sin^2 2t + 4a^2\cos^2 t - 8a^2\cos t\cos 2t + 4a^2\cos^2 2t}dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{8a^2(1+\sin t\sin 2t - \cos t\cos 2t)}dt =$$

לפי הזהות $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$. לפי זהויות לזווית כפולה:

$$\sin 2t = 2\cos t\sin t, \cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$$

$$= 2\sqrt{2}a\int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2 t\cos t - \cos t + 2\sin^2 t\cos t + 1}dt =$$

כעת, נציב $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ ונקבל:

$$2\sqrt{2}a\int_0^{2\pi} \sqrt{-4\cos^3 t + 3\cos t + 1}dt =$$

נשים לב שמתקיים: $-4\cos^3 t + 3\cos t + 1 = (1-\cos t)(2\cos t + 1)^2$, ולכן:

$$2\sqrt{2}a\int_0^{2\pi} |2\cos t + 1|\sqrt{1-\cos t}dt =$$

את האינטגרל אפשר לפתור באמצעות זהות לזווית כפולה:

$$\cos t = 1 - 2\sin^2 \frac{t}{2}$$

ואז: $\sqrt{1-\cos t} = \sqrt{2\sin^2 \frac{t}{2}} = \sqrt{2}\left|\sin \frac{t}{2}\right|$, ונקבל את האינטגרל:

$$4a\int_0^{2\pi}\left|(2\cos t+1)\sin\frac{t}{2}\right|dt =$$

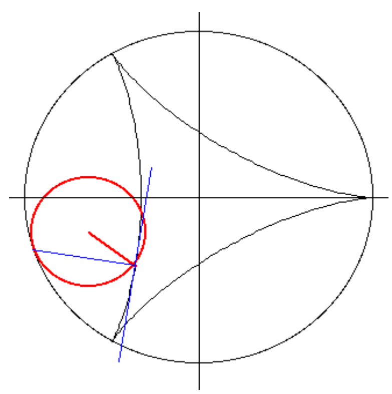
לפי זהות לזווית כפולה: $\cos t = 2\cos^2 \frac{t}{2} - 1$, ולכן:

$$4a\int_0^{2\pi}\left|\left(4\cos^2\frac{t}{2}-1\right)\sin\frac{t}{2}\right|dt$$

לאחר שנפריד את הערך המוחלט לפי תחומים, נציב $u = \cos\frac{t}{2}$ ונקבל $du = -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}dt$.
מכאן האינטגרל פשוט, ולאחר שחוזרים חזרה ל־t הפתרון הוא $\frac{2}{3}\sqrt{1-\cos 3t}\cot\left(\frac{3t}{2}\right)$.
בתחום שלנו, בכל אופן, נקבל:

$$L = 4a\cdot 4 = 16a$$

עקומה זו נקראת **דלתואידה.** דלתואידה מתארת את מסלולה של נקודה קבועה על גבי מעגל המתגלגל (ללא החלקה) בתוך מעגל אחר בעל רדיוס גדול פי 3.



(ג) וקטור הנגזרות הוא:

$$\alpha'(t) = (a - a\cos t, a\sin t)$$

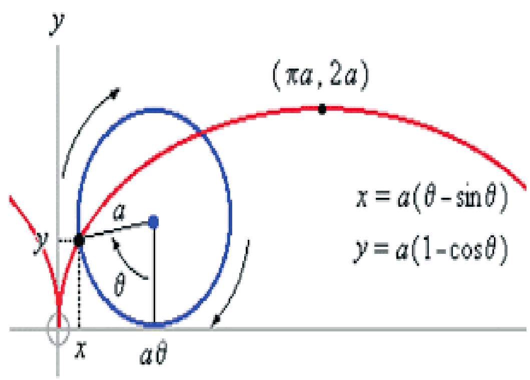
לכן:

$$L = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2 - 2a^2\cos t + a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{2a^2(1-\cos t)}dt$$

לפי הזהות $\sin^2 t+\cos^2 t=1$. לפי זהות לזווית כפולה: $1-\cos t=2\sin^2\frac{t}{2}$,
ולכן:

$$=2a\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=4a\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}dt=4a\cdot 2=8a$$

עקומה זו נקראת **ציקלואידה.** ציקלואידה מתארת את מסלולה של נקודה קבועה על גבי מעגל המתגלגל (ללא החלקה) על קו ישר.



(ד) וקטור הנגזרות הוא:

$$\alpha'(t)=(-2a\sin t+2a\sin 2t,2a\cos t-2a\cos 2t)$$

לכן, בדומה לדלתואידה:

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{4a^2\sin^2 t-8a^2\sin t\sin 2t+4a^2\sin^2 2t+4a^2\cos^2 t-8a^2\cos t\cos 2t+4a^2\cos^2 2t}dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{8a^2\left(1+\sin t\sin 2t-\cos t\cos 2t\right)}dt=$$

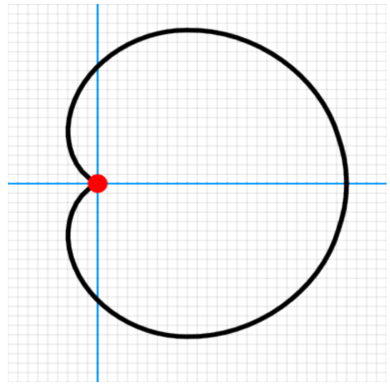
לפי זהויות של זווית כפולה:

$$=2\sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{-2\sin^2 t\cos t-\cos t+2\sin^2 t\cos t+1}dt=2\sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}=$$

בדומה לציקלואידה, האינטגרל הזה שווה ל־$4\sqrt{2}$, ולכן:

$$L=2\sqrt{2}a\cdot 4\sqrt{2}=16a$$

עקומה זו נקראת **קרדיואידה.** קרדיואידה מתארת את מסלולה של נקודה קבועה על גבי מעגל המתגלגל (ללא החלקה) סביב מעגל אחר בעל רדיוס זהה.



מומלץ לחפש ברחבי המרשתת אנימציות המתארות את היווצרות העקומות הללו.