

## פתרון תרגיל 6 חדו"א 2 למורים באר שבע תש"ף

2 ביולי 2020

בכל שאלה מדובר על שברים חלקיים. שאלות 1-6 נמצאות בתרגיל 5.  
7.

$$\int \frac{x}{x^2 - 5x + 6} dx = \int \frac{x}{(x-2)(x-3)} dx$$

כעת:

$$\frac{x}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

מכפילים במכנה, משווים מקדמים או מציבים ערכים ספיציפיים של  $x$  כדי לקבל שתי משוואות. פותרים ומקבלים:  $A = -2, B = 3$  ולכן:

$$\int \frac{x}{(x-2)(x-3)} dx = \int \left( \frac{-2}{x-2} + \frac{3}{x-3} \right) dx = 3 \ln|x-3| - 2 \ln|x-2| + C$$

8.

$$\begin{aligned} \int \frac{11x+17}{2x^2+7x-4} dx &= \int \frac{11x+17}{(2x-1)(x+4)} dx = \int \left( \frac{5}{2x-1} + \frac{3}{x+4} \right) dx = \\ &= \frac{5}{2} \ln|2x-1| + 3 \ln|x+4| + C \end{aligned}$$

9.

$$\int \frac{2x^2 - 9x - 9}{x^3 - 9x} dx = \int \frac{2x^2 - 9x - 9}{x(x-9)(x+9)} dx = \int \left( \frac{A}{x} + \frac{B}{x-9} + \frac{C}{x+9} \right) dx$$

מכפילים במכנה, משווים מקדמים או מציבים ערכים ספציפיים של  $x$  כדי לקבל שלוש משוואות. פותרים ומקבלים:  $A = 1, B = -1, C = 2$  ולכן:

$$= \int \left( \frac{1}{x} + \frac{-1}{x-3} + \frac{2}{x+3} \right) dx = \ln|x| - \ln|x-3| + 2\ln|x+3| + C$$

10. כאן, המעלה של המונה לא קטנה יותר ויש לבצע קודם חילוק פולינומים או להוסיף ולהוריד מהמונה ביטויים מתאימים כך שיצטמצם עם המכנה. נקבל:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 - 10}{x^2 - 4x + 4} dx &= \int \frac{3x^2 - 12x + 12 + 12x - 22}{x^2 - 4x + 4} dx = \int \left( 3 - \frac{12x - 22}{x^2 - 4x + 4} \right) dx = \\ 3x - \int \frac{12x - 24 + 2}{x^2 - 4x + 4} dx &= 3x - \int \left( 6 \cdot \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 4} + \frac{2}{(x-2)^2} \right) dx = 3x - 6 \ln|x^2 - 4x + 4| - \frac{2}{x-2} + C \end{aligned}$$

11. כנ"ל:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{x^2 - 3x + 2} dx &= \int \frac{x^3 - 3x^2 + 2x + 3x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2} dx = \int \left( x + \frac{3x^2 - 9x + 6 + 7x - 6}{x^2 - 3x + 2} \right) dx = \\ &= \int \left( x + 3 + \frac{7x - 6}{(x-1)(x-2)} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 3x + \int \left( \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \right) dx \end{aligned}$$

בשביל השברים החלקיים, מכפילים במכנה, משווים מקדמים או מציבים ערכים ספציפיים של  $x$  כדי לקבל שתי משוואות. פותרים ומקבלים:  $A = -1, B = 8$  ולכן:

$$= \frac{x^2}{2} + 3x - \ln|x-1| + 8\ln|x-2| + C$$

12. נבצע חילוק פולינומים ונקבל:

$$\int \frac{x^5 + 2x^2 + 1}{x^3 - x} dx = \int \left( x^2 + 1 + \frac{2x^2 + x + 1}{x(x-1)(x+1)} \right) dx$$

כשנפרק לשברים חלקיים נקבל:

$$\frac{2x^2 + x + 1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

סה"כ:

$$\int \frac{x^5 + 2x^2 + 1}{x^3 - x} dx = \frac{x^3}{3} + x - \ln|x| + 2\ln|x-1| + \ln|x+1| + C$$

.13

$$\int \frac{2x^2 + 3}{x^2 - x} dx = \int \frac{2x^2 - 2x + 2x + 3}{x^2 - x} dx = \int \left( 2 + \frac{2x + 3}{x(x-1)} \right) dx$$

כשנפרק לשברים חלקיים נקבל:

$$\frac{2x + 3}{x(x-1)} = \frac{5}{x-1} - \frac{3}{x}$$

סה"כ:

$$\int \frac{2x^2 + 3}{x^2 - x} dx = 2x + 5 \ln|x-1| - 3 \ln|x| + C$$

14. כאן, ביטוי אי־פריק מופיע במעריך גבוה, ולכן השברים החלקיים הם:

$$\frac{x^2 + x - 16}{(x+1)(x-3)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} = \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x-3} + \frac{-1}{(x-3)^2}$$

ולכן:

$$\int \frac{x^2 + x - 16}{(x+1)(x-3)^2} dx = -\ln|x+1| + 2 \ln|x-3| + \frac{1}{x-3} + C$$

15. כאן יש גורם אי־פריק ממעלה שניה, ולכן השברים החלקיים הם:

$$\frac{2x^2 - 1}{(4x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{4x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{-\frac{14}{17}}{4x-1} + \frac{\frac{12}{17}x + \frac{3}{17}}{x^2+1}$$

לכן, האינטגרל הוא:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{17} \int \left( \frac{-14}{4x-1} + 6 \cdot \frac{2x}{x^2+1} + 3 \cdot \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \\ &= \frac{1}{17} \left( -\frac{14}{4} \ln|4x-1| + 6 \ln(x^2+1) + 3 \arctan(x^2+1) \right) + C \end{aligned}$$