

תרגול 4

6 בנובמבר 2013

מטריצות אלמנטריות

ראינו בתרגול 2 שלוש סוגי פעולות אלמנטריות. לכל פעולה אלמנטרית נתאים מטריצה הנקראת מטריצה אלמנטרית.

ע"י הפעלת הפעולה על מטריצת היחידה $\rho \rightleftharpoons \rho(I)$ (ב $\mathbb{F}^{3 \times 3}$) דוגמאות

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ החלפת שורות } R_2 \leftrightarrow R_3 \text{ מתאים למטריצה}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ הכפלת שורה 1 ב-5 } 5 \cdot R_1 \rightarrow R_1 \text{ מתאים למטריצה}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ החסרת שורה 3 משורה 1 } R_1 - R_3 \rightarrow R_1 \text{ מתאים למטריצה}$$

הערה:

1. משפט: הפעלת פעולה שורה ρ על מטריצה A זהה להכפלת המטריצה המתאימה

$$\text{מימין } \rho(I)A \text{ דוגמא: } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ אזי } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ מחליף את שורות } A.$$

הפיכות

תהא $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ אם קיימת $B \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ שכך $AB = BA = I_n$ אזי A תקרא הפיכה ו B תקרא ההופכית שלה ותוסמן ב $B = A^{-1}$.

הערה: משפט: אם $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ אז $BA = I_n$ וגם $AB = I_n$ (לא צריך את שני השוויונות $AB = I_n$).

טענה: תהא $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ הפיכה. הוכח $AB = 0 \Rightarrow B = 0$.

פתרון: $AB = 0 \Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}0 = 0 \Rightarrow B = 0$

הערה: אם A אינה הפיכה אז הטענה לא נכונה דוגמא

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

במקרה כזה ש $AB = 0$ ו A, B שונים מאפס אזי A תקרא מחלקת אפס שמאלי ו B מחלק אפס ימיני
 תרגיל: תהא A הפיכה אזי לכל מטריצה B מתקיים כי $Bx = 0 \Leftrightarrow ABx = 0$ (הפתרונות של $Bx = 0$ זההים לפתרונות של $ABx = 0$)
 הוכחה: יהא x כך ש $ABx = 0$ אזי נכפול ב A^{-1} ונקבל כי $Bx = 0$ מצד שני אם $Bx = 0$ אז אם נכפיל ב A נקבל $ABx = A0 = 0$
 תרגיל: A הפיכה $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : A^k \Leftrightarrow$ הפיכה.
 פתרון: (\Rightarrow) נתון הפיכה $A^k \Leftrightarrow A^k B = I \Leftrightarrow AA^{k-1}B = I \Leftrightarrow AC = I$ כאשר $C = A^{k-1}B$ כלומר A הפיכה.

(\Leftarrow) נתון ש- A הפיכה. נבחר $k = 1$ וסיימנו. ■
 תרגיל: תהא מטריצה עם שורת אפסים. הוכח: $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ לא הפיכה.
 פתרון: תהא שורה i שורת האפסים. אזי $\vec{0}B = \vec{0}$ $R_i(AB) = R_i(A)B = \vec{0}B = \vec{0}$ לכל B בפרט לא קיימת B כך $AB = I$
 משפט: מטריצה אלמנטרית $E = \rho(I)$ היא הפיכה ומתקיים $E^{-1} = \rho^{-1}(I)$. (היא מתקבלת מהפעלת הפעולה ההופכה על מטריצת היחידה)
 תרגיל: מצא את ההופכית של המטריצות מתחילת השיעור:

$$\begin{aligned} \text{פתרון: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

הערה: עבור מטריצה P המחליפה שורות $R_i \leftrightarrow R_j$ מתקיים $P^2 = I$ כלומר $P^{-1} = P$.
 תרגיל: יהיו A, B הפיכות הוכח:

$$1. (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

פתרון: נבדוק ישירות
 $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$

(א) הכללה: אם $A_1 \dots A_k$ הפיכות אזי $(A_1 \dots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \dots A_1^{-1}$

2. לכל n טבעי מתקיים $(A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$ (ולכן ניתן להגדיר A^{-n} להיות אחד מהביטויים)

הוכחה: באינדוקציה: עבור $n = 1$ ברור. נניח נכון עבור $n - 1$ ונוכיח עבור n

$$\begin{aligned} (AA \dots A)(A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}) &= A^{n-1}AA^{-1}(A^{-1})^{n-1} \\ &= A^{n-1}(A^{-1})^{n-1} \stackrel{\text{Induction assumption}}{=} A^{n-1}(A^{n-1})^{-1} = I \end{aligned}$$

הערה: לא ניתן לדעת שום דבר על הביטוי $(A+B)^{-1}$. ייתכן $A = I, B = -I$ לא הפיכה.

יתכן $A+B = I_2$ לא הפיכות ו $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t \quad 3.$$

$$A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I^t = I$$

פתרון גם כן סימטרית. מסקנה אם הפיכה וסימטרית אזי A^{-1} גם כן סימטרית.

הוכחה: $A^{-1} \Leftarrow (A^{-1})^t = (A^t)^{-1} = A^{-1}$ ■ סימטרית

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

דוגמא נוספת: מבדיקה ישירה רואים ש $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ למשל מטריצת סיבוב בזווית θ במישור

ההופכית שלה היא $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ סיבוב ב $(-\theta)$

$$\frac{1}{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

אלגוריתם להפוך מטריצות

תרגיל: חשב עבור את ההופכית של $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}$ כך עושים זאת:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2i & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2i & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}i & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

הסבר פורמאלי

בהנתן מטריצה A הפיכה ניתן לעבור מ A ל- I ע"י פעולות שורה אלמנטריות. כלומר

$$E_n \cdots E_1 A = I$$

נפעיל פעולות אלמנטריות $E_n \cdots E_1 I = E_n \cdots E_1 A = A^{-1} \Leftarrow (A|I)$ על המטריצה המורחבת נקבל בסוף $(I|A^{-1})$. הערות:

1. בהנתן מטריצה הפיכה A אזי למערכת $Ax = b$ קיים פתרון יחיד והוא $x = A^{-1}b$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לדוגמא: הפתרון למערכת

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & 1 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}i & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ הינו}$$

2. אם אחרי הדירוג של A לא שווה ל I אזי A אינה הפיכה.
 הוכחה: נסמן ב E את מכפלת המטריצות האלמנטריות שמדרגות את A . ברור כי E הפיכה כמכפלה של מטריצות הפיכות. אם A הפיכה אזי גם EA הפיכה. אבל ב EA יש שורת אפסים כי $EA \neq I$ סתירה לתרגיל מתחילת התרגול.

תרגיל:

$$\text{תהא } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \text{ מצא מטריצה } B \text{ כך ש } BA = I_2$$

פתרון: נשלים את A למטריצה ריבועית מהתרגיל הקודם:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}i & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ כי מצאנו}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}i & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ולכן}$$

חשבו האם קיימת C כך ש $AC = I_3$ (רמז: אם היית קיימת אז מה היה קורה אם היינו מכפילים ב B מהתרגיל?)

פירוק מטריצה הפיכה למטריצות אלמנטריות

בהנתן מטריצה A הפיכה ניתן לעבור מ A ל- I ע"י פעולות שורה אלמנטריות. כלומר

$$E_n \cdots E_1 A = I \text{ אלמנטריות. } A = E_1^{-1} \cdots E_n^{-1} I = E_1^{-1} \cdots E_n^{-1}, E_n \cdots E_1 = A^{-1} \Leftarrow$$

תרגיל: תהא $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}$ שהפכנו כבר- פרק את A ו A^{-1} למטריצות אלמנטריות.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} (*) \xrightarrow{R_3 - iR_2 \rightarrow R_3}$$

פתרון: ראינו שמתקיים

$$(*) \xrightarrow{-\frac{1}{2}iR_1 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

את הפעולות האלמנטריות נייצג במטריצה האלמנטרית המתאימה

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כיון ש $E_3 E_2 E_1 A = I$ נסיק כי

$$A^{-1} = E_3 E_2 E_1, A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftarrow$$

פולינומים

דוגמא: $1 + x, x^2, 2$ הם פולינומים

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

פורמאלית פולינום הוא ביטוי מהצורה

כאשר $a_i \in \mathbb{F}$

n נקרא דרגת הפולינום $\deg(p(x)) = n$

אוסף כל הפולינומים מסומן ב $\mathbb{F}[x]$

הגדרה: תהא A מטריצה ריבועית ו $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ פולינום. אזי הצבה A בפולינום $p(x)$

היא המטריצה

$$p(A) = \sum_{k=0}^n a_k A^k = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I$$

$$p(A) = A^2 - I_2 = 0_2 \text{ אז } p(x) = x^2 - 1 \text{ ו } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ למשל}$$

תרגיל: תהא A מטריצה ריבועית $p(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^k$ פולינום ללא מקדם חופשי.

הוכח כי אם $p(A) = 0$ אז A אינה הפיכה או שקיים פולינום עם מעלה נמוכה יותר שמאפס את A .

פתרון: נניח כי A הפיכה. נתון כי $\sum_{k=1}^n a_k A^k = 0$ אזי $A(\sum_{k=1}^n a_k A^{k-1}) = 0$ כיון ש A

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} A^k = \sum_{k=1}^n a_k A^{k-1} = 0$$

הפיכה אזי

$$q(A) = 0 \text{ נגדיר } q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} x^k \text{ ואז } \deg(q(x)) < n \text{ ומקיים } q(A) = 0$$