תרגיל 1

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1. $\int \ln^2 x dx$

פתרון:

נשתמש בשיטת המכפלה. $\ln^2 x = 1 \cdot \ln^2 x$.

$$\int \ln^2 x dx = x \ln^2 x - \int 2 \ln x dx$$

כעת נותר לחשב $\int \ln x dx$.

באותו אופן:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x$$

לסיכום:

$$\int \ln^2 x dx = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x$$

2. $\int \frac{x^3 - 3}{x^2 - 4x + 3} dx$

פתרון:

ראשית, נבצע חילוק פולינומים.

$$\frac{x^3 - 3}{x^2 - 4x + 3} = \frac{19x - 15}{x^2 - 4x + 3} + x - 4$$

כעת נבצע פירוק לשברים חלקיים.

$$\frac{19x - 15}{x^2 - 4x + 3} = \frac{21}{x - 3} - \frac{2}{x - 1}$$

ולבסוף,

$$\int \frac{x^3 - 3}{x^2 - 4x + 3} dx = \int \frac{21}{x - 3} - \frac{2}{x - 1} + x - 4$$

3. $\int \frac{1}{3x^2+4x+5}dx$

פתרון:

ראשית, נבצע השלמה לריבוע:

$$3x^2+4x+5=(\sqrt{3}x+\frac{2}{\sqrt{3}})+3\frac{2}{3}$$

לכן:

$$\int \frac{1}{3x^2+4x+5}dx=\int \frac{1}{(\sqrt{3}x+\frac{2}{\sqrt{3}})^2+3\frac{2}{3}}dx$$

נציב $t=\sqrt{3}x+\frac{2}{\sqrt{3}}$. אזי $dt=\sqrt{3}dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{t^2+3\frac{2}{3}}dt=\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{3\frac{2}{3}}\frac{1}{(\frac{\sqrt{3}t}{\sqrt{11}})^2+1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{3}{11}\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{\sqrt{3}t}{\sqrt{11}})$$

נציב בחזרה ונקבל:

$$\int \frac{1}{3x^2+4x+5}dx=\frac{1}{\sqrt{11}}\arctan\frac{3x+2}{\sqrt{11}}$$

4. $\int \sin^2 x\cos^3 xdx$

פתרון:

נציב $t=\sin x$. $dt=\cos xdx$. נקבל:

$$\int t^2(1-t^2)dt=\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}=\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}$$

5. $\int \frac{1}{\sin x-\cos x}dx$

פתרון:

נשתמש בהצבה האוניברסלית.

$t=\tan\frac{x}{2}$ ולכן $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

$$\int \frac{2}{2t-1+t^2}dt=\int \frac{2}{t^2+2t-1}=\int \frac{2}{(t+1)^2-2}dt=\int \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{(t+1)-\sqrt{2}}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{(t+1)+\sqrt{2}}dt=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln|t+1-\sqrt{}$$