תרגיל 3

1. יהי R חוג קומוטטיבי. נזכיר כי אוסף האיברים הנלפוטנטים בחוג מהווה אידאל. נסמן אותו בI. הוכיחו שבחוג המנה R/I אין נלפוטנטים.
פתרון:

נניח ש$x+I$ הוא נלפוטנט שונה מ0 מR/I. בפרט, $x \notin I$. ובכן, קיים n טבעי כך ש: $0+I=(x+I)^n=x^n+I$. זה אומר ש$x^n \in I$. אבל אז קיים m טבעי כך ש $(x^n)^m=0$. כלומר, $x^{nm}=0$. זה אומר שx נלפוטנט, בסתירה לכך ש$x \notin I$.

2. יהיו R_1, R_2 חוגים. למה איזומורפי $R_1 \times R_2/\{0\} \times R_2$? הוכיחו.
פתרון:

נוכיח ש$R_1 \times R_2/\{0\} \times R_2 \cong R_1$. ובכן נגדיר את האפימורפיזם הבא: $\varphi : R_1 \times R_2 \to R_1$ ע"י $\varphi(a,b)=a$. קל לראות שזהו אכן אפימורפיזם. הגרעין זה כל האיברים שהולכים ל0. כלומר, כל הזוגות (a,b) שעבורם $a=0$. וזה שווה בדיוק ל$\{0\} \times R_2$. לכן ממשפט האיזומורפיזן הראשון, $R_1 \times R_2/\{0\} \times R_2 \cong R_1$.

3. תנו דוגמא לחוג לא קומוטטיבי R ואידיאל $I \trianglelefteq R$ כך ש R/I קומוטטיבי.
פתרון:

בהתאם לשאלה הקודמת, נקח $R_1=\mathbb{Z}, R_2=M_2(\mathbb{Z})$ ונגדיר $R=R_1 \times R_2$ ו$I=\{0\} \times R_2$. אז R לא קומוטטיבי, אבל $R/I \cong R_1 = \mathbb{Z}$, כן קומוטטיבי.

4. יהיו R_1, R_2חוגים, ו$I_1 \trianglelefteq R_1, I_2 \trianglelefteq R_2$ אידיאלים. כזכור $I_1 \times I_2 \trianglelefteq R_1 \times R_2$. הוכיחו ש$R_1 \times R_2/I_1 \times I_2 \cong (R_1/I_1)\times(R_2/I_2)$.
פתרון:

נגדיר אפימורפיזם: $\varphi : R_1 \times R_2 \to (R_1/I_1)\times(R_2/I_2)$ ע"י $\varphi(a,b)=(a+I_1, b+I_2)$. קל לראות שזה אכן אפימורפיזם. הגרעים הוא כל הזוגות (a,b) כך ש-$(a+I_1, b+I_2)=(0+I_1, b+I_2)$. אבל זה אומר ש$a \in I_1, b \in I_2$, כלומר $(a,b) \in I_1 \times I_2$.

5. מצאו n כך ש$\mathbb{Z}[i]/\langle 3+i \rangle \cong \mathbb{Z}_n$. הוכיחו את האיזומורפיזם.
פתרון:

נבחר $n=10$. נבנה הומומורפיזם באופן הבא:

1 חייב ללכת ל1, ולכן 3הולך ל3.

אנחנו רוצים ש$3+i$ ילך ל0(מודולו 10), ולכן i חייב להישלח ל7.

לכן נגדיר: $\varphi(a+bi)=(a+7b) \mod 10$. קל לראות ש1 הולך ל1, ושההעתקה על ושומרת חיבור. נוכיח שהיא שומרת כפל.

$$\varphi((a+bi)(c+di)) = \varphi(ac-bd+i(ad+bc)) = ac-bd+7(ad+bc) \mod 10$$

$\varphi(a+bi)\varphi(c+di) = (a+7b) \mod 10(c+7d) \mod 10 = (a+7b)(c+7d)$ $\mod 10 = (ac+7(ad+bc)+49bd \mod 10 = ac-bd+7(ad+4c) \mod 10$.

כעת נחשב את הגרעין. ברור ש$\varphi(3+i)=0$ ולכן $\langle 3+i\rangle \subseteq \ker\varphi$.

מצד שני, יהיה $a+bi\in\ker\varphi$. אזי $a+7b\equiv 0 \mod 10$. כלומר, $a=10k+3b$ עבור $k\in\mathbb{Z}$ כלשהו. נקבל ש $a+bi = 3b+bi+10k = b(3+i)+k(3-i)(3+i) \in \langle 3+i\rangle$.
מש"ל.

6. יהי R חוג. נגדיר את המאפיין של R, מבומן ב$\mathrm{char}(R)$, להיות n אם $1+...+1$ n פעמים שווה ל0, ולכן $\mathbb{N}\ni m<n$, $1+...+1$ m פעמים לא שווה ל0. אם אין n כזה, נגדיר את המאפיין של R להיות 0. אם המאפיין של R שונה מ0, נגיד שלוג יש מאפיין סופי. יהי R חוג עם מאפיין סופי, ו$I \trianglelefteq R$.

(א) הוכיחו ש$\mathrm{char}(R/I) \le \mathrm{char}(R)$.
פתרון:
נניח $char(R)=n$. אז $(1+I)+...+(1+I) = (1+...+1)+I = 0+I$ כאשר מחברים n פעמים. לכן $char(R/I)\le char(R)$.

(ב) הוכיחו שלמעשה, $\mathrm{char}(R/I)|\mathrm{char}(R)$.
פתרון:
נסמן $char(R)=n, char(R/I)=m$ כאשר $m\le n$. מחילוק עם שארית, יש k,r כך ש$n=km+r$ ו$r<m$. ובכן, ראינו שאם נחבר $1+I$ n פעמים נקבל $0+I$ בחוג המנה. כמו כן, אם נחבר $1+I$ km פעמים, נקבל k כפול $(1+I)...+(1+I)$ שמחברים m פעמים, כלומר $k\cdot(1+I+...+1+I) = k\cdot(0+I) = (0+I)+...+(0+I)$ kפעמים, שזה $0+I$. לכן גם אם נחבר $1+I$ r פעמים נקבל $(0+I)=(0+I)-(0+I)$, בסתירה למינימליות של m. לכן $r=0$. כלומר $m|n$.