נכתב על ידי נועם יערי

הערה

בהגדרת קבוצה אפסית אפשר להרשות כיסוי על ידי קטעים סגורים.

הוכחה

בהינתן $\varepsilon > 0$, נכסה על ידי קטעים סגורים שסכום ארכיהם קטן מ - $\frac{\varepsilon}{2}$. כל קטע סגור מוכל בקטע פתוח שארכו לכל היותר פי שניים. נקבל כיסוי פתוח שסכום ארכי קטעיו קטן $2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

הגדרה

נאמר שתכונה מסוימת מתקיימת כמעט בכל הקטע $[a,b]$ אם קבוצת הנקודות בקטע שאין להן תכונה זאת זו אפסית.

למה

תהי $f(x) \geq 0$ בקטע $[a,b]$. אם

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

אז $f(x) = 0$ כמעט בכל הקטע.

הוכחה

נעזר בטענת עזר:

<u>טענת עזר:</u> בהינתן המשפטון, לכל $c > 0$, $f(x) < c$ כמעט בכל הקטע.

<u>הוכחה:</u> יהי $c > 0$. תהי $A := \{x \in [a,b]: f(x) \geq c\}$.

תהי P חלוקה של $[a,b]$ (נקודות החלוקה הן $x_0, \cdots, x_k$).

תהי $I := \left\{i: \underbrace{A \cap [x_{i-1}, x_i] \neq \phi}_{f(x)\geq c \text{ יש } x \text{ בקטע כך ש}}\right\}$.

$$\sum_{i\in I} \Delta_i \cdot c \leq \sum_{i\in I} \Delta_i \underbrace{\beta_i}_{\forall i\in I:\, \beta_i \geq c} \leq \sum_{i=1}^{k} \Delta_i \cdot \beta_{i_{\geq 0}} = \bar{S}(P)$$

$$\sum_{i\in I} \Delta_i \leq \frac{1}{c} \cdot \bar{S}(P) \Leftarrow c\sum_{i\in I} \Delta_i \leq \bar{S}(P)$$

עבור $\lambda(P) \to 0$,

$$\bar{S}(P) \to \overline{\int_a^b f(x)dx} = \int_a^b f(x)dx =_{\text{נתון}} 0$$

$$A \subseteq \bigcup_{i\in I} [x_{i-1}, x_i] \ \ (I \text{ מהגדרת})$$

פורמלית:

יהי נתון $\varepsilon > 0$ ניקח $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה P עם $\lambda(P) < \delta$ מתקיים $\bar{S}(P) < c \cdot \varepsilon$.

מהנ"ל, קיבלנו כיסוי של הקבוצה A על ידי קטעים סגורים שסכום ארכיהם קטן או שווה ל- $\frac{1}{c} \cdot \bar{S}(P) < \varepsilon$.

מטענת העזר, לכל n הקבוצה $A_n := \{x \in [a,b]: f(x) \geq \frac{1}{n}\}$ אפסית לכן הקבוצה $A := \bigcup_n A_n$ אפסית (איחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה הוא קבוצה אפסית).

נשים לב: $A = \{x \in [a,b]: f(x) > 0\}$. (תרגיל!)

■

למה

עבור פונקציות אינטגרביליות f, g בקטע $[a,b]$:

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)d(x)$$

הוכחה

מהגדרת האינטגרל ולינאריות סכומי רימן:

$$\sigma_{\alpha f+\beta g}(P) = \sum_{i=1}^{k} \Delta_i(\alpha f + \beta g)\left(d_{i_{\text{נקודות בניקוד החלוקה}}}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \Delta_i\big(\alpha f(d_i) + \beta g(d_i)\big) =_{\text{הסכום סופי}} \alpha \sum_{i=1}^{k} \Delta_i f(d_i) + \beta \sum_{i=1}^{k} \Delta_i g(d_i) =$$

$$= \alpha\sigma_f(P) + \beta\sigma_g(P) \underset{(\text{אינטג'} f,g)}{\xrightarrow{\lambda(P)\to 0}} \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx$$

■

למה

יהיו $f \leq g$ פונקציות אינטגרביליות ב- $[a,b]$. אם

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

אז $f(x) = g(x)$ כמעט בכל בקטע.

הוכחה

$$\int_a^b \overbrace{(g(x)-f(x))}^{\geq 0} dx =_{\text{משפטון קודם}} \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx =_{\text{נתון}} 0$$

ממשפטון קודם, $g(x)-f(x)=0$ כב"ה (כמעט בכל הקטע).

■

משפט לבג - $H. Lebesgue$ (חלק ראשון)

אם f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אז f רציפה כמעט בכל הקטע (כלומר: אוסף נקודות אי הרציפות של f קבוצה אפסית).

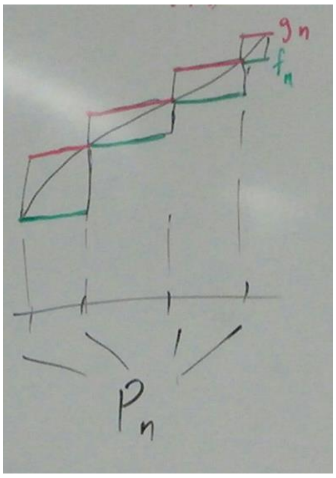
דוגמה לפונקציה רציפה כב"ה אך יש לה אינסוף נקודות אי רציפות: פונקציית הפופקורן.

$$pop(x)=\begin{cases} 0, & x\notin\mathbb{Q} \\ 1, & x=0 \\ \frac{1}{n}, & x=\frac{m^{\geq 0}}{n} \text{ (מצומצם)} \end{cases}$$

הגבול של $pop(x)$ הוא 0 בכל נקודה לכן אינה קציפה בנקודה $\mathbb{Q} \ni$. רציפה בכל $x\in\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

הוכחה

עבור חלוקה P_n:



נקבע סדרת חלוקות P_n כך שלכל n, $P_n\subseteq P_{n+1}$ עם $\lambda(P_n)\to 0$. f אינטגרבילית, לכן

$$\underline{S}(P_n) \nearrow_{\text{החלוקות הולכות מתעדנות}} \int_a^b f(x)dx \swarrow \bar{S}(P_n)$$

לכל n נגדיר

$$f_n(x) := \begin{cases} \alpha_i, & x\in(x_{i-1},x_i) \\ f(x_i), & x=x_i \end{cases}$$

$$g_{n(x)} := \begin{cases} \beta_i, & x\in(x_{i-1},x_i) \\ f(x_i), & x=x_i \end{cases}$$

בכל קטע $[x_{i-1},x_i]$, האינפימום של f ושל f_n שווה. כנ״ל לגבי הסופרימום של f ושל g_n. לכן

$$\begin{cases}\underline{S}_f(P_n)=\underline{S}_{f_n}(P_n)\\ \bar{S}_f(P_n)=\bar{S}_{g_n}(P_n)\end{cases}$$

לכל n ולכל x בקטע:

$$\begin{aligned}&f_n(x)\le \overbrace{f_{n+1}(x)}^{\text{כאן הערך בכל נקודה הוא אינפימום על קבוצה יותר קטנה}}\\ &g_{n+1}(x)\le g_n(x)\\ &f_n(x)\le f(x)\le g_n(x)\end{aligned}$$

לכן יש גבולות $f_n\nearrow \underline{f}(x)\le f(x)\le \bar{f}(x)\swarrow g_n(x)$.

זה מגדיר פונקציות $\underline{f}(x),\bar{f}(x)$ בקטע.

$$\underline{S}_{f_n}(P_n)\le_{f_n\le \underline{f}}\underline{S}_{\underline{f}}(P_n)\le \bar{S}_{\underline{f}}(P_n)\le_{\underline{f}\le f}\bar{S}_f(P_n)$$

מדרבו כש - $n\to\infty$:

$$\underline{S}_{f_n}(P_n),\bar{S}_f(P_n)\to\int_a^b f(x)dx$$

מסנדוויץ׳,

$$\underline{S}_{\underline{f}}(P_n),\bar{S}_{\underline{f}}(P_n)\to\int_a^b f(x)dx$$

מקריטריון רימן לאינטגרביליות,

$$\int_a^b \underline{f}(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

$\underline{f}\le f$ בקטע לכן מהמשפטון $\underline{f}(x)=f(x)$ כב״ה.

באותו אופן, $f(x)=\bar{f}(x)$ כב״ה. לכן $\underline{f}(x)=f(x)=\bar{f}(x)$ כב״ה.

פורמלית, $A_1=\left\{x\in[a,b]:f(x)\ne\bar{f}(x)\right\}$, $A_2=\left\{x\in[a,b]:f(x)\ne\underline{f}(x)\right\}$ אפסיות ולכן איחודן A קבוצה אפסית.

$(A^c=\left\{x\in[a,b]:f(x)=\underline{f}(x)=\bar{f}(x)\right\})$

תהי $A=\left\{x\in[a,b]:\left(f(x)\ne\underline{f}(x)\vee f(x)\ne\bar{f}(x)\right)\right\}$ אפסית.

הקבוצה

$$\bigcup_n P_n$$

בת מניה, לכן אפסית.

נראה שכל נקודה $x \notin (A \cup \bigcup_n P_n)_{\text{אפסית}}$

היא נקודת רציפות של f. יהי $\varepsilon > 0$. ניקח n (מספיק גדול) כך ש -

$$\left|g_n(x) - \underbrace{\left(\bar{f}(x)\right)}_{=f(x)}\right|, \left|f_n(x) - \underbrace{\left(\underline{f}(x)\right)}_{=f(x)}\right| < \varepsilon$$

יש קטע בחלוקה כך ש - $x \in (x_{i-1}, x_i)$. ניקח $\delta > 0$ כך ש - $(x - \delta, x + \delta) \subseteq (x_{i-1}, x_i)$. יהי $y \in (x - \delta, x + \delta)$ אז $\alpha_i \leq \underbrace{f(y), f(x)}_{\text{שניהם ב-}(x_{i-1}, x_i)} \leq \beta_i$

$$|f(y) - f(x)| \leq \beta_i - \alpha_i = g_n(x) - f_n(x) =$$
$$= \underbrace{\left(g_n(x) - f(x)\right)}_{\geq 0} + \underbrace{\left(f(x) - f_n(x)\right)}_{\geq 0} < 2\varepsilon$$

■