גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית - שבוע 2

28 ביולי 2015

תזכורת:

יהי M משטח הנתון על ידי $\varphi : U \to M$ כאשר $U \subseteq \mathbb{R}^2$ פתוחה.

המישור המשיק ל־M בנקודה p מסומן $T_p(M)$ ומוגדר על ידי:

$$T_p(M) = \{\gamma'(0) | \gamma(0) = p\}$$

כאשר γ עקומה ב־M. כלומר, כל הוקטורים המשיקים לעקומה כאשר היא עוברת בנקודה p (כאן נדרוש ש־0 נמצא בתחומה של העקומה, לשם הנוחות).

אפשר גם להביע את המישור המשיק על ידי:

$$T_p(M) = span\,\{\varphi_u(p), \varphi_v(p)\}$$

ולכן אפשר להסתכל על כל וקטור $w \in T_p(M)$ כעל צירוף ליניארי:

$$w = w^1\varphi_u + w^2\varphi_v$$

התבנית היסודית הראשונה היא תבנית בילינארית $I : T_p(M) \times T_p(M) \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי:

$$I(a,b) = \langle a, b \rangle$$

כאשר המכפלה הפנימית היא זו המושרית מהמכפלה של $\mathbb{R}^3$.

אנו יכולים להסתכל על הוקטורים a, b כעל צירופים ליניאריים של φ_u, φ_v:

$$a = a^1\varphi_u + a^2\varphi_v$$
$$b = b^1\varphi_u + b^2\varphi_v$$

ומליניאריות המכפלה הפנימית לקבל:

$$I(a,b) = a^1b^1\langle\varphi_u,\varphi_u\rangle + a^1b^2\langle\varphi_u,\varphi_v\rangle + a^2b^1\langle\varphi_v,\varphi_u\rangle + a^2b^2\langle\varphi_v,\varphi_v\rangle$$

נסמן: $g_{11} = \langle\varphi_u,\varphi_u\rangle, g_{12} = g_{21} = \langle\varphi_u,\varphi_v\rangle, g_{22} = \langle\varphi_v,\varphi_v\rangle$ ונקבל:

$$I(a,b) = b^tGa$$

כאשר:

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

מטריצה זו נקראת המטריקה (הרימנית) ו־g_{ij} נקראים מקדמי המטריקה.

מה אפשר לעשות עם המטריקה?

בעזרת המטריקה אפשר, למשל, לחשב אורך של עקומה; אם נתונה עקומה מישורית חלקה $\gamma : [a,b] \to U$, אפשר להגדיר $\beta : [a,b] \to M$ על ידי:

$$\beta = \varphi \circ \gamma$$

זו עקומה מרחבית שנמצאת על M.

אנו יודעים שהאורך שלה נתון על ידי הנוסחה:

$$L(\beta) = \int_a^b \|\beta'(t)\|\, dt$$

מתקיים:

$$\|\beta'(t)\| = \sqrt{(\gamma'(t))^t\, G(\gamma'(t))}$$

ולכן אפשר לחשב את אורכה של β על ידי הנוסחה:

$$L(\beta) = \int_a^b \sqrt{(\gamma'(t))^t\, G(\gamma'(t))}dt$$

<u>תרגיל:</u>

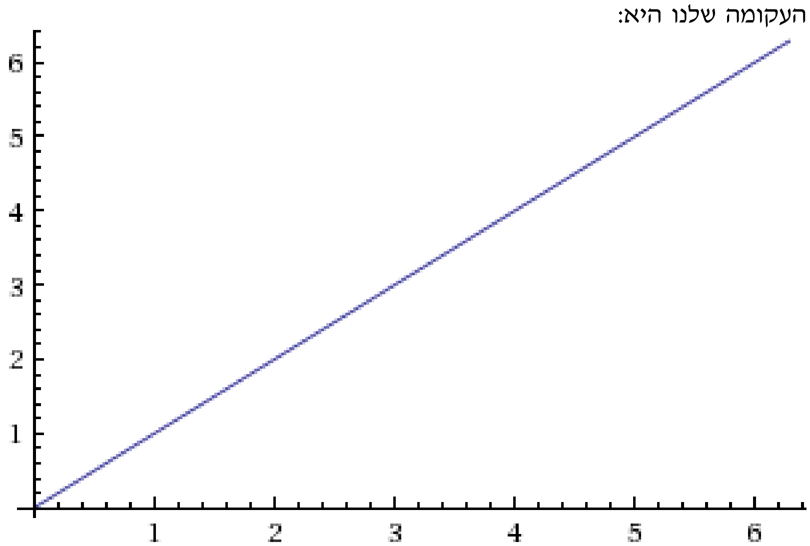
נסמן: $\Omega = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u,v \in [0,2\pi]\right\}$.

נגדיר עקומה $\alpha(t) = (t,t)$ כאשר $t \in [0,2\pi]$.

א. מהו אורכה של α?

<u>פתרון:</u>

העקומה שלנו היא:



כאשר התחום שלנו הוא עד ל-2π.

לפי פיתגורס, אורך העקומה הוא: $\sqrt{2}\cdot 2\pi = \sqrt{(2\pi)^2 + (2\pi)^2}$.

למתקדמים, אפשר גם לחשב בעזרת הנוסחה:

$$L(\alpha)=\int_a^b \|\alpha'(t)\|\,dt=\int_0^{2\pi}\|(1,1)\|\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}dt=\sqrt{2}\cdot 2\pi$$

ב. המשטח S נתון על ידי: $r:\Omega\to\mathbb{R}^3$, כאשר:

$$r(u,v)=(u\cos v,u\sin v,v)$$

מצאו את אורכה של העקומה $\beta=r\circ\alpha$.

פתרון:

קודם כל, מהו המשטח שלנו? v יוצר גם את ההתקדמות למעלה/למטה ביחס לציר z וגם את הזווית, ולכן זהו סליל, קפיץ שמתקדם במעלה ציר ה$-z$. u משפיע על עובי הסליל, ולכן המשטח שלנו הוא מין סליל עבה, משהו כזה:

(אה? ראיתם? משהו "אמיתי", מ"החיים").

אפשר לחשב את אורכה של β בדרך הסטנדרטית; נחשב אותו בעזרת המטריקה.

אם כן, וקטורי הנגזרות הם:

$$r_u=(\cos v,\sin v,0),r_v=(-u\sin v,u\cos v,1)$$

ולכן מקדמי המטריקה הם:

$$g_{11} = \langle r_u, r_u \rangle = \cos^2 v + \sin^2 v + 0^2 = 1$$

$$g_{12} = g_{21} = \langle r_u, r_v \rangle = -u \cos v \sin v + u \cos v \sin v = 0$$

$$g_{22} = \langle r_v, r_v \rangle = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + 1 = u^2 + 1$$

ולכן:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + u^2 \end{pmatrix}$$

כעת, $\alpha'(t) = (1, 1)$ ולכן:

$$\sqrt{(\gamma'(t))^t \, G(\gamma'(t))} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{t^2 + 2}$$

ולכן:

$$L(\beta) = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{t^2 + 2} dt$$

זהו האינטגרל הטריוויאלי שלנו, והוא שווה בערך ל-22.43.

ג. נחליף את המטריקה ל:

$$G = \begin{pmatrix} 2e^{2u} & 0 \\ 0 & 2e^{2v} \end{pmatrix}$$

מהו האורך של β עכשיו?

<u>פתרון:</u>

נשתמש בנוסחה. הפעם:

$$\sqrt{(\gamma'(t))^t \, G(\gamma'(t))} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^{2t} & 0 \\ 0 & 2e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{2e^{2t} + 2e^{2t}} = 2e^t$$

ולכן:

$$L(\beta) = \int\limits_0^{2\pi} 2e^t dt = 2 \cdot \left(e^{2\pi} - 1\right)$$

<u>תרגיל:</u>

תהי $r : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ המפה המוגדרת על ידי:

$$r(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

זהו גליל אינסופי עם רדיוס 1 שמרכזו על ציר ה$-z$.

נסמן: $U = [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$ ותהי $\gamma : [a, b] \to U$ עקומה. נגדיר עקומה נוספת על הגליל שלנו על ידי:

$$\rho(t) = r(\gamma(t))$$

הוכיחו ש: $L(\rho) = L(\gamma)$.

<u>פתרון:</u>

האורך של γ נתון על ידי:

$$L(\gamma) = \int\limits_a^b \left\|\gamma'(t)\right\| dt$$

נחשב את מקדמי המטריקה. וקטורי הנגזרות הם:

$$r_u = (-\sin u, \cos u, 0), r_v = (0, 0, 1)$$

ולכן מקדמי המטריקה הם:

$$g_{11} = \langle r_u, r_u \rangle = \sin^2 u + \cos^2 u = 1$$
$$g_{12} = g_{21} = \langle r_u, r_v \rangle = 0$$
$$g_{22} = \langle r_v, r_v \rangle = 1$$

ואם כן:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן האורך של ρ הוא:

$$L(\rho) = \int_a^b \sqrt{(\gamma')^t G(\gamma')}dt = \int_a^b \sqrt{(\gamma')^t (\gamma')}dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt = L(\gamma)$$

והאורכים אכן שווים.

כדי להמחיש זאת, קחו דף וקשקשו עליו עקומה כלשהי. כעת גלגלו את הדף לגליל (חלקכם בדוואי מנוסים בכך); זו מה שעושה המפה r. מה קרה לקשקוש שלנו? הפיכת הדף המישורי לגליל לא כיווצה או מתחה אותו, ולכן אין שום סיבה שאורך הקשקוש ישתנה.

אם כן, המפה r שומרת על אורך של עקומות. האם היא שומרת על העקמומיות?

לא בהכרח. אין צורך להיכנס לחישובים מיותרים. התבוננו בקו ישר לרוחב הדף שלנו. העקמומיות שלו היא 0. לאחר שהדף הפך לגליל, הקו הפך למעגל, שהעקמומיות שלו היא 1.

מצד שני, אם נצייר קו לאורך הדף, גם לאחר שהדף הפך לגליל הקו נותר קו.

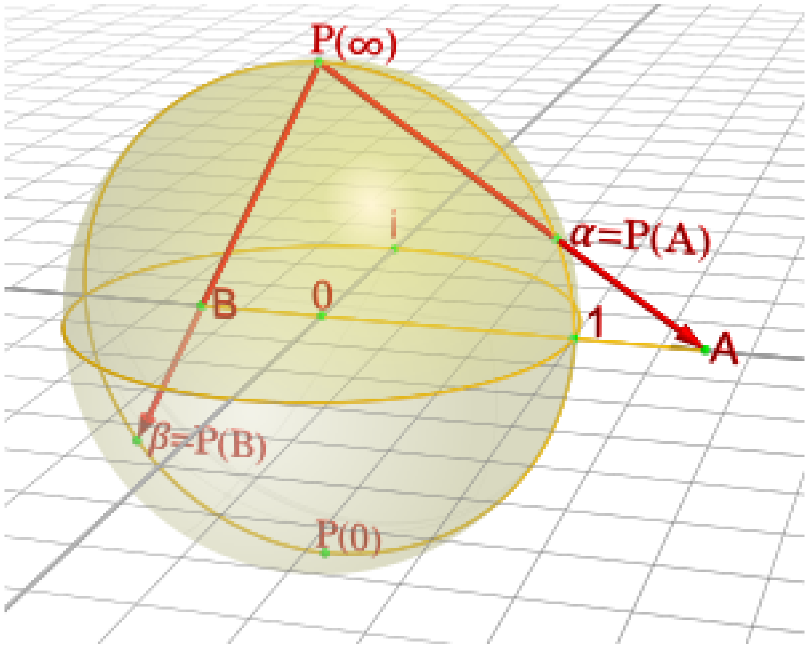
<u>תרגיל:</u>

נתבונן במשטח S^2, ספירת היחידה ב־$\mathbb{R}^3$, עם שתי פרמטריזציות:

א. $f(\theta, \phi) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$.

ב. $F(u, v) = \frac{1}{u^2+v^2+1}(2u, 2v, u^2+v^2-1)$.

F היא הפונקציה ההופכית להטלה הסטריאוגרפית:



איך פועלת ההטלה הסטריאוגרפית? "מניחים את הספירה על המישור. לכל נקודה על הספירה, נמתח קו בינה לבין הקוטב הצפוני. את הקו נמשיך עד שהוא חותך את המישור. ההטלה הסטריאוגרפית שולחת את הנקודה על הספירה לנקודת החיתוך של הקו עם המישור.

מצאו את המטריקה הרימנית בשני המקרים.

<u>פתרון:</u>

א. וקטורי הנגזרות הם:

$$f_\theta = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta), f_\phi = (-\sin\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\phi, 0)$$

לאחר חישוב מקבלים:

$$G = \begin{pmatrix} \langle f_\theta, f_\theta \rangle & \langle f_\theta, f_\phi \rangle \\ \langle f_\phi, f_\theta \rangle & \langle f_\phi, f_\phi \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ב. באופן דומה מחשבים ומקבלים:

$$G = \frac{1}{(u^2+v^2+1)^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אם כן, פרמטריזציות שונות משרות מטריקות שונות.

<u>משפט:</u>

שני משטחים הם איזומורפיים (איזומטריים) אם ורק אם קיימות פרמטריזציות שלהם שבהן G זהה.

כלומר, התבנית היסודית הראשונה היא תכונה פנימית של המשטח (לא משתנה על ידי איזומטריות).

שימוש נוסף לתבנית היסודית הראשונה הוא חישוב שטחים:

$$\iint\limits_{\varphi(D)} dS = \iint\limits_{D} \sqrt{\det G}dudv$$

שימו לב שמתקיים:

$$G = J_\varphi^t \cdot J_\varphi$$

והיזכרו בנוסחה לחישוב שטח של משטח k מימדי ב$-\mathbb{R}^n$ מאינפי 4.

<u>תרגיל:</u>

נתונה פרמטריזציה של משטח $r : U \to M$. תהי $f : A \to U$ פונקציה, $f(x,y) = (u,v)$ כאשר $A, U \subseteq \mathbb{R}^2$.

נגדיר פרמטריזציה חדשה: $\tilde{r} = r \circ f$. הביעו את $\widetilde{G}$, המטריקה של $\tilde{r}$, באמצעות G, המטריקה של r.

<u>פתרון:</u>

נזכור ש: $\widetilde{G} = J_{\tilde{r}}^t \cdot J_{\tilde{r}}$. כעת, לפי כלל השרשרת:

$$J_{\tilde{r}} = J_r(f) \cdot J_f$$

ולכן:

$$\widetilde{G} = J_{\tilde{r}}^t \cdot J_{\tilde{r}} = \left(J_r(f) \cdot J_f\right)^t \cdot J_r(f) \cdot J_f = J_f^t \cdot J_r(f)^t \cdot J_r(f) \cdot J_f = J_f^t G J_f$$

ובסה"כ:

$$\widetilde{G}(x,y) = J_f^t(x,y) G(f(x,y)) J_f(x,y)$$

<u>תרגיל:</u>

נתון המשטח $r : U \to M$, כאשר $U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\right\}$, ונתונה המטריקה:

$$G = \frac{1}{y^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

א. מצאו את אורך העקומות $\beta_i = r \circ \gamma_i$ במקרים הבאים:

1. $\gamma_1(t) = (A\cos t, A\sin t)$ כאשר $t \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

<u>פתרון:</u>

המטריקה כבר נתונה לנו.

וקטור הנגזרות של העקומה הוא: $\gamma_1'(t) = (-A\sin t, A\cos t)$ ולכן:

$$L(\beta_1) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{\begin{pmatrix} -A\sin t & A\cos t \end{pmatrix} \frac{1}{(A\sin t)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -A\sin t \\ A\cos t \end{pmatrix}} dt =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{\frac{1}{(A\sin t)^2} \cdot \left(A^2\sin^2 t + A^2\cos^2 t\right)} dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}} dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\sin t} dt$$

את האינטגרל הזה אפשר לחשב בעזרת ההצבה האוניברסלית $x = \tan\frac{t}{2}$ ואפשר ללכת עם ולהרגיש בלי, כך:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\sin t} dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}} dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\tan\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}} dt = \left(\ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)\right)_{t=\frac{\pi}{3}}^{t=\frac{2\pi}{3}} = \ln 3$$

וזהו האורך של β_1.

2. $\gamma_2(t) = (A\cos t, A\sin t)$ כאשר $t \in [0,\pi]$.

<u>פתרון:</u>

הפרמטריזציה זהה לזו שבתת־סעיף 1, ורק הגבולות משתנים, ולכן:

$$L(\beta_2) = \left(\ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)\right)_{t=0}^{t=\pi} = \infty$$

כלומר, חצי הקשת העליונה של המעגל הופכת לעקומה באורך אינסופי, בעוד ששישית הקשת העליונה של המעגל הופכת לעקומה באורך $\ln 3$.

3. $\gamma_3(t) = (1,t)$ כאשר $t \in [0,1]$.

<u>פתרון:</u>

וקטור הנגזרות של העקומה הוא $\gamma_3'(t) = (0,1)$ ולכן:

$$L(\beta_3) = \int\limits_0^1 \sqrt{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{(t)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} dt = \int\limits_0^1 \sqrt{\frac{1}{t^2}} dt = (\ln t)_{t=0}^{t=1} = \infty$$

אם כן, גם קטע (מקביל לציר ה־y) הופך לעקומה באורך אינסופי.

ב. חשבו את השטח של $r \circ \Omega$ כאשר:

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), x^2+y^2 > 1\right\}$$

<u>פתרון:</u>

נשתמש בנוסחה: $\iint_{\varphi(D)} dS = \iint_D \sqrt{\det G} dxdy$.

מתקיים:

$$\sqrt{\det G} = \sqrt{\begin{vmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{vmatrix}} = \frac{1}{y^2}$$

מהו התחום D שלנו? $D=\left\{-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}, \sqrt{1-x^2}<y<\infty\right\}$ ולכן:

$$S(r\circ\Omega)=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty}\frac{1}{y^2}dydx=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{y}\right)_{y=\sqrt{1-x^2}}^{y=\infty}dx=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=(\arcsin x)_{x=-\frac{1}{2}}^{x=\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$$

כלומר התחום האינסופי הזה הופך לתחום עם שטח סופי.

הידעת? המשטח M הוא **המישור ההיפרבולי**, מישור המקיים את כל האקסיומות האוקלידיות חוץ מאקסיומת המקבילים.

הוא נקרא גם חצי המישור של פואנקרה או המישור של לובצ'בסקי.

לפי משפט הילברט, אין שיכון של חצי המישור של פואנקרה בתוך $\mathbb{R}^3$.