הוכיחו או הפריכו:

$$(A\backslash B)\cup(B\backslash C)=(A\cup B)\setminus(B\cap C)$$

הכלה דו־כיוונית או פעולות על קבוצות, למשל: $(A\cup B)\setminus(B\cap C)=(A\cup B)\cap(B\cap C)^c$.

נלך על הכלה דו־כיוונית.

יהי $x\in(A\backslash B)\cup(B\backslash C)$, צ"ל: $x\in(A\cup B)\setminus(B\cap C)$.

לפי הגדרת איחוד, $x\in A\backslash B\vee x\in B\backslash C$; לפי הגדרת הפרש:

$$(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin C)$$

אפשר לפתוח עם פילוג:

$$(p\wedge q)\vee r\equiv(p\vee r)\wedge(q\vee r)$$

$$(x\in A\vee(x\in B\wedge x\notin C))\wedge(x\notin B\vee(x\in B\wedge x\notin C))$$

שוב, פילוג:

$$((x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\notin C))\wedge((x\notin B\vee x\in B)\wedge(x\notin B\vee x\notin C))$$

$(x\notin B\vee x\in B)$ טאוטולוגיה, אפשר לוותר עליו. כמו כן,

$$(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\notin C)\wedge(x\notin B\vee x\notin C)$$

הגדרת איחוד, דה־מורגן:

$$(x\in A\cup B)\wedge(x\notin B\cap C)\wedge(x\in A\vee x\notin C)$$

איך "ניפטר" מהביטוי $(x\in A\vee x\notin C)$? אם נתקדם עוד שלב, לפי הגדרת הפרש:

$$(x\in(A\cup B)\setminus(B\cap C))\wedge(x\in A\vee x\notin C)$$

אפשר לחלק למקרים – נראה שבכל מקרה שבו $x\in(A\cup B)\setminus(B\cap C)$, גם $x\in A\vee x\notin C$. במילים אחרות, נראה שבכל מקרה שבו $x\in(A\cup B)\setminus(B\cap C)=T$ גם $x\in A\vee x\notin C=T$, ואז נקבל שאכן:

$$(x\in(A\cup B)\setminus(B\cap C))\wedge(x\in A\vee x\notin C)\equiv x\in(A\cup B)\setminus(B\cap C)$$

יש לנו שני מקרים – $x \in A$ או $x \in B$. במקרה השני, $x \notin B \cap C$.
במקרה הראשון, $x \in A$ ולכן ברור ש: $x \in A \vee x \notin C$.
במקרה השני, $x \in B$ וגם $x \notin B \cap C$ ולכן: $x \notin C$, ושוב ברור ש: $x \in A \vee x \notin C$.
סה"כ, קיבלנו שאכן: $(x \in (A \cup B) \setminus (B \cap C)) \wedge (x \in A \vee x \notin C) \equiv x \in (A \cup B) \setminus (B \cap C)$. השתמשנו אך ורק בהגדרות ובשקילויות לוגיות, ולכן:

$$x \in (A \cup B) \setminus (B \cap C) \iff x \in (A \backslash B) \cup (B \backslash C)$$

והטענה נכונה.

עבור $n \in \mathbb{N}$ נגדיר את $f(n)$ להיות מספר המחלקים הראשוניים של n.
על $A = \mathbb{N} \backslash \{1\}$ נגדיר יחס R כך:

$$(n, m) \in R \iff (f(n) < f(m)) \vee (f(n) = f(m) \wedge n \leq m)$$

למשל, נתבונן במספרים: $45, 108$. $45 = 3^2 \cdot 5$ ולכן: $f(45) = 2$. $108 = 2^2 \cdot 3^3$ ולכן: $f(108) = 2$. אם כן:

$$f(45) = f(108) \wedge 45 \leq 108 \Longrightarrow (45, 108)$$

נסמן ב־P את קבוצת כל המספרים הראשוניים, ונסמן: $B = \{p^5 | p \in P\}$ – כל הראשוניים בחזקת 5. כלומר: f

$$B = \{2^5, 3^5, 5^5, 7^5, 11^5, \ldots\}$$

מהם $\inf(B), \sup(B)$? ראשית, לכל $p^5 \in B$, $f(p^5) = 1$, יש רק ראשוני אחד שמחלק את p^5, זה p. לכן המספרים ב־B מסודרים לפי "קטן־שווה" – במילים אחרות, לכל $m, n \in B$, $f(m) = f(n) = 1$ ולכן: $(n, m) \in R \iff (n \leq m)$. לכן:

$$\min B = \inf(B) = 32 = 2^5$$

זהו המספר הגדול ביותר שקטן מכל איברי הקבוצה B. מצד שני, בקבוצה B עצמה אין מקסימום, האיברים הולכים וגדלים. אבל, כל איבר שיש לו

שני מחלקים ראשוניים (כבר לא נמצא ב־B, אבל זה לא מפריע) יהיה גדול יותר מכל איברי B, ולכן $\sup B$ הוא המספר הכי קטן שיש לו שני מחלקים ראשוניים, כלומר:

$$\sup(B) = 6$$