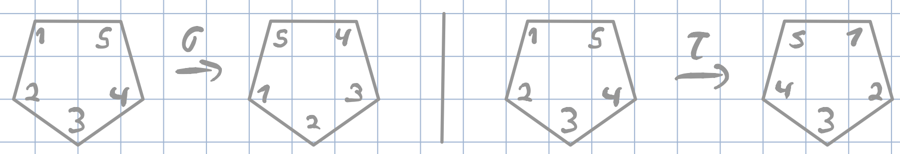
תזכורת:

לכל n, מוגדרת החבורה D_n שמייצגת את כל הדרכים לסובב או לשקף מצולע עם n צלעות. $|D_n|=2n$



אפשר לייצג את החבורה באופן הבא:

האיברים של D_n הם מהצורה $\tau^i\sigma^j$ $(j=0,\dots,n-1 \quad i=0,1)$

$\tau^2=id$, $\sigma^n=id$, $\tau\sigma=\sigma^{-1}\tau$

נבנה טבלת כפל של D_3

	1	τ	σ	σ^2	$\tau\sigma$	$\tau\sigma^2$
1	1	τ	σ	σ^2	$\tau\sigma$	$\tau\sigma^2$
τ	τ	1	$\tau\sigma$	$\tau\sigma^2$	σ	σ^2
σ	σ	$\tau\sigma^2$	σ^2	1	τ	$\tau\sigma$
σ^2	σ^2	$\tau\sigma$	1	σ	$\tau\sigma^2$	τ
$\tau\sigma$	$\tau\sigma$	σ^2	$\tau\sigma^2$	τ	1	σ
$\tau\sigma^2$	$\tau\sigma^2$	σ	τ	$\tau\sigma$	σ^2	1

חבורות מוצגות סופית:

חבורה נקראת מוצגת סופית אם היא נוצרת על ידי מספר סופי של איברים וניתן לתאר את הכפל בחבורה על ידי מספר סופי של יחסים בין היוצרים

<יחסים, יוצרים>

מילים ששוות ל-1

למשל:

$D_n=\langle\tau,\sigma\mid\tau^2,\sigma^n,\tau\sigma\tau\sigma\rangle$

$\sigma\tau\sigma\tau$

דוגמאות:

1) $\mathbb{Z}_n=\langle x\mid x^n\rangle$

2) $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}=\langle x,y\mid y^{-1}x^{-1}yx\rangle$

x,y מתחלפים

הומומורפיזמים:

הגדרות:

יהיו G,H חבורות. נגיד כי $f:G\to H$ תקרא:

1) הומומורפיזם, אם מתקיים $\forall g_1,g_2: f(g_1 g_2)=f(g_1)f(g_2)$

2) מונומורפיזם, אם הוא הומ' וחח"ע

3) אפימורפיזם אם הוא הומ' ועל

4) איזומורפיזם אם הוא הומ' חח"ע ועל

5) אוטומורפיזם, אם $G=H$ ו-f איזומורפיזם

הגדרה: G,H נקראות איזומורפיות אם קיים איזומורפיזם ביניהם

טענה:

"חבורות איזומורפיות זה יחס שקילות"

תרגילים:

1) $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{\times}$, $\varphi(x)=e^x$ $\qquad \varphi(x+y)=e^{x+y}=e^x e^y=\varphi(x)\cdot\varphi(y)$

חח"ע ולא על. לכן מונו'

2) $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^{\times}$ $\varphi(x)=e^x$ לא חח"ע $e^{2\pi i}=e^0=1$

φ על כי $re^{i\theta}=e^{\ln r+i\theta}$

3) $\det:GL_n(\mathbb{F})\to\mathbb{F}$ הומומורפיזם כי $|AB|=|A|\cdot|B|$

לא חח"ע $\begin{vmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{vmatrix}$ כן על $\begin{vmatrix} r & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{vmatrix}=r$ ולכן אפי'

4) $\varphi:\mathbb{R}^{\times}\to\mathbb{R}$ $\varphi(x)=x$. לא הומ' כי $\varphi(1\cdot 1)\neq\varphi(1)+\varphi(1)$

5) $\varphi:\mathbb{Z}_2\to U_3$ $\varphi(0)=1,\ \varphi(1)=2$ נבדוק:

$\varphi(0+0)=1=\varphi(0)\cdot\varphi(0)$

$\varphi(0+1)=2=\varphi(0)\cdot\varphi(1)$

$\varphi(1+1)=\varphi(0)=1=\varphi(1)\cdot\varphi(1)=4\overset{\bmod 3}{=}1$

תרגיל:

מצאו חבורה איזומורפית ל $(\mathbb{R},+)$

פתרון:

$(\mathbb{R},+)\cong(0,\infty,\cdot)$ עם $x\mapsto e^x$

תכונות של הומומורפיזמים:

$\varphi:G\to H$ הומ׳

1) $\varphi(e_G)=e_H$

2) $\varphi(g^n)=(\varphi(g))^n$

3) $\varphi(g^{-1})=(\varphi(g))^{-1}$

4) $\ker(\varphi)=\{x\in G\mid\varphi(x)=1_H\}$ תת חבורה (נורמלית) של G

5) $H\geq Im(\varphi)=\{x\in H\mid \exists g\in G,\varphi(g)=x\}$

תרגיל:

$\varphi:G\to H$ הומ׳ $o(\varphi(g))\mid o(g)$

הוכחה:

בהרצאה

האם $\mathbb{Z}_6\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$?

$\varphi(0)=(0,0)$ $\varphi(1)=(1,1)$ $\varphi(2)=(1,1)+(1,1)=(0,2)$, ...

משפט:

שתי חבורות ציקליות מאותו סדר איזומורפיות

הוכחה:

תהיינה G,H חבורות ציקליות מסדר n

נסמן $x\in G$ ו- $y\in H$ יוצרים. איבר ב- G הוא מהצורה x^i $(0\le i\le n-1)$

איבר ב- H הוא מהצורה y^i

נגדיר $\varphi: G \to H$. $\varphi(x^i)=y^i$

$$\varphi(x^ix^j)=\varphi(x^{i+j})=\varphi(x^{i+j \bmod n})=y^{i+j \bmod n}=y^iy^j=\varphi(x^i)\varphi(x^j)$$

חבורות עם 6 איברים:

$\mathbb{Z}_6\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3\ ,U_{14},\ D_3\ ,S_3$

מיינו עד כדי איזומורפיזם

$U_{14}=\{1,3,5,9,11,13\}$

3 הוא לא מסדר 2 ולא מסדר 3 ולכן מסדר 6

U_{14} ציקלית ולכן $U_{14}\cong\mathbb{Z}_6$

D_3 ו-S_3 לא אבליות, ולכן לא איזו' ל-$\mathbb{Z}_6$

$\sigma\to(1,2,3)$

$\tau\to(2,3)$ $\quad\tau\sigma=\sigma^{-1}\tau\quad$ $\sigma^{-1}\to(1,2,3)$

$\tau\sigma\to(1,3)\quad$ $\sigma^{-1}\tau\to(1,3)$

$\sigma\tau\to(2,1)$

S_3 נוצרת על ידי $(1,3),(1,2,3)$ ולכן לכל איבר יש מקור

קיבלנו הומ' בין 2 חבורות סופיות ושוות גודל, ולכן איזו'.

תרגיל:

תהי G חבורה ציקלית ו- $\varphi:G\to H$ הומ'. הוכיחו $Im(\varphi)\le H$ ציקלית

פתרון:

יהי $g\in G$ יוצר. יהי $h\in Im(\varphi)$. יש לו מקור. $h=\varphi(g^i)=(\varphi(g))^i$

לכן $\varphi(g)$ יוצר

תרגילים:

1) האם קיים איזו' $f:(\mathbb{Q}^+,\cdot)\to(\mathbb{Q},+)$

$f^{-1}(x)=f^{-1}(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x)=f^{-1}(\frac{1}{2}x)f^{-1}(\frac{1}{2}x)$

ואם f^{-1} הייתה על אז לכל איבר ב- Q^+ היה מקור למשל $2=f^{-1}(x)$

ובפרט $2=(f^{-1}(\frac{1}{2}x))^2$

בסתירה Q

2) האם קיים מונו' $\varphi: GL_2(Q)\to Q^*$

לא. באופן כללי אם קיים מונו' $\varphi:G\to H$ אז $G\cong\varphi(G)\le H$

לכן תת חבורה של חבורה אבלית היא אבלית וידוע $GL_2(Q)$ לא אבלית

3) $H=\langle 5\rangle\le\mathbb{R}^*$ האם קיים איזו' $\varphi:H\to\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$?

לא. H ציקלית. תמונה של חבורה ציקלית היא ציקלית ו- $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$ לא ציקלית

תרגיל:

אפיינו את כל החבורות עבורן $f:G\to G$ שמוגדרת על ידי $f(g)=g^{-1}$ היא איזו' (הומו')

פתרון:

אם G אבלית. $f(gh)=(gh)^{-1}=h^{-1}g^{-1}=g^{-1}h^{-1}=f(g)f(h)$

אם G לא אבלית $\forall g,h: f(gh)=f(g)f(h)$

לכן נרצה ש $h^{-1}g^{-1}=g^{-1}h^{-1} \Rightarrow gh=hg$

תזכורת: $H\le G$. נגיד ש H נורמלית ונסמן $H\trianglelefteq G$ אם $\forall g\in G,\ gH=Hg$

באופן שקול: $gHg^{-1}\subseteq H$ $\forall g\in G$ (כלומר, $g^{-1}hg\in H$ $\forall h\in H$)

דוגמאות:

1) $SL_n(\mathbb{F})\trianglelefteq GL_n(\mathbb{F})$

$A\in SL_n(\mathbb{F})$, $B\in GL_n(\mathbb{F})$ צריך להראות $B^{-1}AB\in SL_n(\mathbb{F})$

$|B^{-1}AB|=|B|^{-1}|A||B|=|A|=1$