1128 1130 9

מחברת מס' ____
מתוך ____ מחברות

TEL AVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל-אביב

## הוראות לנבחנים ולנבחנות (נכתבו בלשון זכר אך נועדו לשני המינים)

## לפני התחלת הבחינה מלא את כל הפרטים הבאים בכתב ברור וקרא בעיון את ההוראות:

תאריך הבחינה 22.01.2008

שם הקורס אינפי

שם המורה אלי להר

החוג/המגמה פיזיקה

מס' זיהוי
(העתק מכרטיס הנבחן/התלמיד)
[redacted]

03211833041
201338357
9

לשימוש המורה הבוחן:

הציון 100

המחברת נבדקה ביום ____

חתימת המורה ____

118303

1. הנך נדרש לשמור על טוהר הבחינה ועל עבודה עצמית ולהישמע להוראות המשגיחים ולנוהלי האוניברסיטה. אין להעתיק, אין לדבר ואין להעביר חומר בין הנבחנים.

**נבחן הנוהג בניגוד להוראות צפוי להפסקת בחינתו ולהעמדה לדין משמעתי.**

2. על הנבחן להבחן בחדר שבו הוא רשום.

3. אין להחזיק **טלפונים ניידים** או אמצעי תקשורת ומכשירים אלקטרוניים כלשהם בזמן הבחינה. על הנבחן להניח את כל חפציו האישיים בצד החדר הרחק ממקום מושבו.

4. אין להחזיק בהישג יד, בחדר הבחינה או בסמוך לו, כל חומר הקשור לבחינה או לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה.

5. קריאת השאלון מותרת רק לאחר קבלת רשות מהמשגיח.

6. נבחן לא יעזוב את מקומו ולא את חדר הבחינה בטרם סיים את הבחינה *ללא* קבלת רשות מהמשגיח. בעת יציאה מן החדר, יפקיד הנבחן את מחברות הבחינה והשאלון (טופס הבחינה) בידי המשגיח.

7. נבחן שנכנס לחדר הבחינה וקיבל את השאלון לידיו, לא יהא רשאי לעזוב אותו אלא כעבור חצי שעה לפחות ממועד תחילתה ורק לאחר שיחזיר למשגיח את המחברת **ואת השאלון**, ויקבל ממנו את התעודה המזהה שאותה מסר עם כניסתו לכיתה. נבחן שהחליט לעזוב בלי לכתוב את הבחינה ייחשב כמי שנבחן במועד זה וציונו יהיה "0".

8. אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת. פרטי הנבחן ימולאו על כריכת המחברת במקום המיועד לכך בלבד.

9. אין לתלוש דפים מהמחברת. טיוטה תיכתב בתוך המחברת בלבד. אין להשתמש בדפים שהביא הנבחן.

10. יש לכתוב את התשובות בעט כחול או שחור, בכתב יד ברור ונקי. בתום הבחינה יחזיר הנבחן את המחברת והשאלון ויקבל מיד המשגיח את התעודה המזהה.

11. **אין לכתוב מעבר לקו האדום משני צידי הדף.**

בהצלחה.

20 -1

20 -2

20 -3

20 -4

20 -5

2 -6

1. א. תהי סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. נגדיר את סדרת הסכומים החלקיים שלה $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ באופן הבא:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס למספר $S$ אם (ורק אם) סדרת הסכומים החלקיים $S_n$ מתכנסת למספר $S$, כלומר אם (ורק אם)

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\ln n}{n}$

נסמן $a_n = \frac{\ln n}{n}$, ונבדוק לייבניץ.
שווה ל- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$

נתבונן בסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$$a_n = \frac{\ln n}{n}$$

זוהי סדרה אפסה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \underset{\infty/\infty}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

לופיטל

בנוסף היא סדרה יורדת:

נתבונן בפונקציה $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ $\quad x>0$

ונשים לב ש- $f(n) = a_n$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

קל לראות כי $f'(x)$ יורדת לכל $x>e$ (כי $\forall x>e \ \ln x>1$), לכן הסדרה $a_n$ יורדת לכל $n>n_0>e$

לכן, הסדרה שלנו ($a_n$) יורדת ושואפת לאפס,
לכן הטור $\sum(-1)^n a_n$ מתכנס לפי
משפט לייבניץ, כלומר טור זה מתכנס.

נבדוק את הטור מתכנס בהחלט:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\cdot\frac{\ln n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$$

לכל $e<n$ מתקיים

$\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$ (כי $\ln n > 1$ עבור $n>e$)

הטורים $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ הם
טורים חיוביים. לכן, מהעובדה ש-
$\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$ (החל מ- $n_0$ מסוים)
נובע כי: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n} > \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.
הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ הוא הטור ההרמוני
הידוע כטור מתבדר (מבחן האינטגרל למשל).
לכן טור זה מתבדר גם כן (בהחלט).

לכן (לסיכום), הטור
$\sum(-1)^n\cdot\frac{\ln n}{n}$ מתכנס בתנאי.

ג. נגדיר $b_n=(-1)^n\cdot\frac{\ln n}{n}$

$$b_1=(-1)^1\cdot\frac{\ln 1}{1}=0$$

$$b_2=(-1)^2\cdot\frac{\ln 2}{2}\approx 0.35$$

מחליף סימן, יורד ואפס

טורנו הוא טור לייבניץ, לכן סכומו ($S$) נמצא
בין 0 שני איברים סמוכים, ובפרט, $S<b_2$
לכן $S<0.35$, לכן הוא בהכרח לא 2.

1.

~~$a = \sum_{n=1}$~~ :~~[illegible]~~

נימוק נוסף:

בהינתן ~~[illegible]~~ נסכום 3:

$b_3 = (-1)^3 \frac{\ln 3}{3} = -0.36$

$b_4 = \frac{\ln 4}{4} = 0.346$

$b_5 = \frac{\ln 5}{5} = 0.32$

$b_6 = -0.29$

$b_7 = 0.28$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = -0.019$

$S_4 = a_1 + \dots + a_4 = 0.327$

S נמצא בין 2

של סכומים סמוכים,

בפרט $S_3 < S < S_4$, ולכן

בהכרח שונה מ-2 $(S_4 < 2)$.

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

2.

נמצא $a$:

$$a \le \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\ln n}{n} \le a + \frac{1}{3}$$

~~[illegible]~~

הטור מתחלף סימן, ולכן סכומו נמצא

בין כל 2 סכומים חלקיים סמוכים.

אנו רוצים למצוא את S בתחום

של $\frac{1}{3}$, ולכן נמצא 2 סכומים חלקיים סמוכים

שהפרשם קטן מ-$\frac{1}{3}$.

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

נדרוש:

$S_{2n-1} = a \qquad S_{2n} \le a + \frac{1}{3}$

$S_{2n} \le S_{2n-1} + \frac{1}{3}$

$a_{2n} \le \frac{1}{3}$

$\frac{\ln(2n)}{2n} \le \frac{1}{3}$

מתקיים עבור $n=3$.

נבחר את $a = S_{2n-1}$

במקרה זה:

$$a = S_{2n-1} = S_5 = \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} - \frac{\ln 5}{5} = 5.06 \cdot 10^{-3}$$

ואז

$$a + \frac{1}{3} = 0.338$$

$$S_{2n} = 0.304$$

כלומר:

$$a \le S_{2n-1}, \quad S_{2n} \le a + \frac{1}{3}$$

וגם

$$S_{2n-1} < S < S_{2n}$$

כלומר

$$a \le S_{2n-1} < S < S_{2n} \le a + \frac{1}{3}$$

מ.ש.ל.

$$\left( a = 5.06 \cdot 10^{-3} \right)$$

2. $x^6-3x^4-24x^2=a$

א. $a=10$

$$x^6-3x^4-24x^2=10$$

$$x^6-3x^4-24x^2-10=0$$

נסמן $x^2=t$

$$t^3-3t^2-24t-10=0$$

נתבונן בפונק'

$$f(t)=t^3-3t^2-24t-10$$

$$\lim_{t\to\infty} f=\infty \qquad \lim_{t\to-\infty} f=-\infty$$

$$f'(t)=3t^2-6t-24=3(t^2-2t-8)=$$

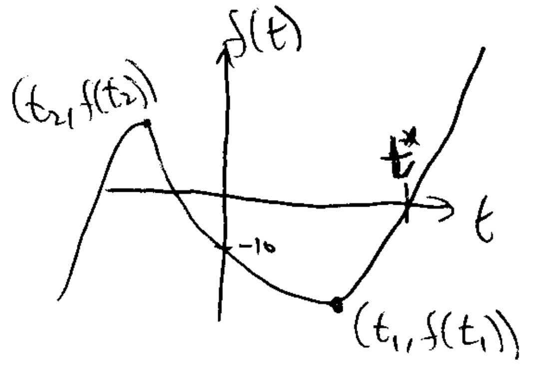
$$=3(t^2-4t+2t-8)=3(t-4)(t+2)$$

$$t_1=4 \qquad t_2=-2$$

$$f''(t)=6t-6 \Rightarrow \underbrace{f''(t_1)>0}_{\text{מינימום}},\ \underbrace{f''(t_2)<0}_{\text{מקסימום}}$$

$$f(t_1)=-90<0 \qquad f(t_2)=18>0$$

לכן גרף הפונק' היה נראה כך (מ"ן ציור סכמתי):




(~~הערה~~: נקודת החיתוך של הגרף עם ציר ה- x: $f(0)=-10$.)

לכן קיים שורש פתרון, אחד חיובי ושניים שליליים. מכיוון ש- $t=x^2$, לכן "יתרנו"

הפתרונות השליליים, יהיו רק שני
ערכי $X$ אפשריים $(x^2=t^*)$ $(t^*>0)$
למשוואה שני פתרונות.

ב. אני יודע שזו פונקציה זוגית לכן
הסבר של זה רק אח"כ.    לפי נושא.
הבנתי כ-

$$f(x)=x^6-3x^4-24x^2-a$$

$$f'(x)=6x^5-12x^3-48x=6x(x^4-2x^2-8)$$

נשווה זו למכפלה מעק' :

$x_1=0$

$$x^4-2x^2-8=0$$

$$t^2-2t-8=0 \quad (t=x^2)$$

$$t_1=4 \quad \cancel{t_2=-2}$$

$$x^2=4 \quad (x^2\geq 0)$$

$$x=\pm 2$$

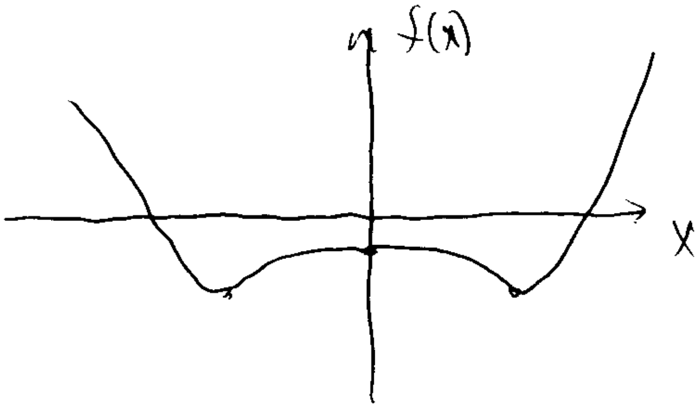
$$(f(0)<0)$$

$$f''(x)=30x^4-36x^2-48$$

$f''(0)<0 \rightarrow$ מקסימום

$f''(2)=f''(-2)>0 \rightarrow$ מינימום

לכן הגרף (סקיצה גרף) ייראה כך




$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} f=\infty$$

(מספר הפתרונות נכון)

$f(2) = -80-a$

$f(3) = 414+a$

לכן בהתנה ש- $a=10$

$f(2)<0$ , $f(3)>0$

לכן בקטע $[2,3]$ יש
פתרון לפי משפט ערך הביניים,
(הרחבה של כך שה- $f(x)$
רציפה, כי היא פולינום).

ג. הקטע $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ אין
לא משתנה הפתרון כפי שהגרף
שימוש בסעיף הקודם.

זה מתקיים בהכרח מכיוון
שהפתרונות $x_1<x_2$ (לפי הנחה
הבעיה) מקיימים

$x_1<-2$ , $x_2>2$.

גם כן בהנחה ש- $a=10$

ד. $f(x)= x^6-3x^4-24x^2-a$

כאשר, נקודות הקיצון הן $2,-2$ לא
משנה ה- $a$ (שינוי ה- x מקבוע).

$\lim_{x\to\infty} f = \lim_{x\to-\infty} f = \infty$

הפונק' זוגית

$f(x)=f(-x)$

לכן 0 נקודת חיתוך של

$f$ עם ציר ה-$y$ (פתרון למשוואה)

בתחום $(0,\infty)$ "תגדיר" הופך

נק' חיתוך נוספת בקטע $(-\infty,0)$,

לכן מס' נקודות החיתוך יהיה

זוגי לכל $a$ המקיים $f(a)\neq 0$.

לכן נבדוק מתי $f(a)=0$

$$f(0) = -a = 0$$
$$\downarrow$$
$$a=0$$

לכן רק עבור $a=0$ למשוואה

מספר אי זוגי של פתרונות.

Good!

3. (א) $\int \ln^2 x\,dx$

ראשית נחשב את -

$\int \ln x \, dx$

כלומר אינטגרציה בחלקים:

$$\int \ln x\,dx = \int 1\cdot \ln x\,dx = x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x + C$$

כעת נחשב את האינטגרל

המקורי באמצעות אינטגרציה בחלקים:

$$I = \int \ln^2 x\,dx = \int \ln x \cdot \ln x\,dx$$

$$F = \ln x \qquad G' = \ln x$$

$$F' = \frac{1}{x} \qquad G = x(\ln x - 1) \Leftarrow \text{כפי שחישבנו קודם}$$

לכן

$$I = x\ln x(\ln x - 1) - \int(\ln x - 1)\,dx =$$

$$= x\ln x(\ln x - 1) - (x\ln x - x - x) + C =$$

$$= x\ln x(\ln x - 1) - (x\ln x - 2x) + C =$$

$\cancel{\quad}$

בדיקה:

$\cancel{\quad}$

$$(x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x)' = \ln^2 x + 2\ln x - 2\ln x - 2 + 2 = \ln^2 x$$

(ב) $\int_1^\infty \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$

תחילה נחשב את האינטגרל

הלא-מסוים:

$$\int \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = \int \frac{1}{u^2}\,du = -u^{-1} + C = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{\ln x} + C$$

$$u = \ln x \rightarrow \frac{1}{x}dx = du$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\ln^2 x}dx = \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{1}{x\ln^2 x}dx = -\frac{1}{\ln x}\Bigg|_1^{M\to\infty} =$$

$$= \lim_{\substack{M\to\infty \\ \varepsilon\to 1^+}}\left(-\frac{1}{\ln M}+\frac{1}{\ln\varepsilon}\right) =$$

$$= \lim_{\substack{M\to\infty \\ \varepsilon\to 1^+}} \frac{1}{\ln\varepsilon} - \frac{1}{\ln M} = \infty - 0 = \infty$$

האינטגרל

מתבדר.

(ג) $\lim_{x\to 0}\left(3+\sin\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)\right)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x - x}{x\sin x}\right) \underset{\substack{\downarrow \\ \frac{0}{0} \text{ לופיטל}}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}\right) \underset{\substack{\downarrow \\ \frac{0}{0} \text{ לופיטל}}}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin x}{\cos x+\cos x - x\sin x}\right) = 0$$

לכן

$$\lim_{x\to 0}\left(3+\sin\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)\right) = 3+\sin 0 = 3$$

4. א. $e^{x+x^2} = ?$

$$f(x) = e^{x+x^2}$$

$$f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = (1+2x)\cdot e^{x+x^2}$$

$$f''(x) = 2\cdot e^{x+x^2} + (1+2x)^2\cdot e^{x+x^2}$$

$$f'''(x) = (2\cdot(1+2x))\cdot e^{x+x^2} + 2(1+2x)\cdot 2\cdot e^{x+x^2} + (1+2x)^3\cdot e^{x+x^2}$$

$$f^{(4)}(x) = 6\cdot 2\cdot e^{x+x^2} + 6\cdot(1+2x)^2\cdot e^{x+x^2} + 2\cdot 3(1+2x)^2\cdot e^{x+x^2} + (1+2x)^4\cdot e^{x+x^2}$$

$$f'(0) = 1 \quad f''(0) = 3 \quad f'''(0) = 7 \quad f^{(4)}(0) = 25$$

$$e^{x+x^2} \approx 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{6}x^3 + \frac{25}{24}x^4$$

ב. f גזירה 5 פעמים ב-c.

$f'(c) = f''(c) = f'''(c) = 0 \qquad f^{(4)}(c) > 0$

אם נסמן ש $g(x) = f''(x)$

אז $g'(c) = 0$ ו- $g''(c)>0$ ולכן c

הוא נקודת מינימום של $f''(x)$ $(g(x))$.

$f''(c) = 0$ ולכן יש סביבה של c בה

$f''(x) > 0$ לכל x בסביבה $\rightarrow [0 = f''(c) = g(c)]$

בנוסף, עפ"י הנתון $f''(x)>0$ עבור x-ים בסביבה,

כי $(f'(x))'>0$ ⟵ נובע מכך ש- $f'(x)$ עולה בסביבה של c.

$f'(c)=0$, והיא עולה בסביבה של c, לכן

$f'(x)>0$ עבור $x>c$ בסביבה,

ו- $f'(x)<0$ עבור $x<c$ בסביבה.

לכן:

עבור $x>c$ בסביבה $f'(x)>0$, לכן הפונ' עולה: $f(x)>f(c)$.

עבור $x<c$ בסביבה, $f'(x)<0$, לכן הפונ' יורדת

ו- $f(x)>f(c)$. (כי הפונ' יורדת אל $f(c)$).

יופי!

לכן בסביבה של c, c היא נקודת מינימום של $f(x)$.

5. (א) הטענה לא נכונה.

דוגמא נגדית:

$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ עונה על הדרישות —

(מתכנסת ל- 0 כנדרש),

אבל

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}=\left(\frac{1}{2}\right)\neq 1$$

(ב) הטענה נכונה.

נניח $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}c$ , $c\neq 0$.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=c\neq 0$$

לכן ~~...~~ גם

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=c$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}a_{n+1}}{\lim_{n\to\infty}a_n}=\frac{c}{c}=1 \quad ■$$

השימוש בארתמטיקה של

גבולות אפשרי במקרה זה

כיון שהגבולות קיימים ואינם 0.

(ג) הטענה אינה נכונה.

$a_n=n$

$\downarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$$

אבל

$a_n$ מתבדרת בבירור.

## נסיון להוכחת הטענה:

$f$ מוגדרת וגזירה לכל $x$,

והנגזרת $f'$ חסומה. נניח

$$|f'| \le M$$

נבדוק אם

$$\lim_{x\to\infty} \left| \frac{f(x)}{x^2} \right| = 0$$

(אם תתקיים טענה זו, בהכרח תתקיים הטענה המבוקשת).

$$\lim_{x\to\infty} \left| \frac{f(x)}{x^2} \right| = \lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{x^2}$$

מהעובדה ש-$f$ גזירה והנגזרת חסומה ניתן לרשום כי:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + \bar{o}(h)$$

קיים $h$ כזה לכל $x$ מהעובדה ש-$f$ גזירה

אי-שוויון המשולש

$$0 < |f(x)| = |f(x_0+h)| = |f(x_0) + f'(x_0)\cdot h - \bar{o}(h)| \le |f(x_0)| + |f'(x_0)\cdot h| + |\bar{o}(h)|$$

$$\le |f(x_0)| + M|h| + |\bar{o}(h)|$$

כי הנגזרת חסומה

$$0 \le \lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{x^2} = \lim_{h\to\infty} \frac{|f(x_0+h)|}{(x_0+h)^2} \le \lim_{h\to\infty} \frac{|f(x_0)| + M\cdot|h| + |\bar{o}(h)|}{x_0^2 + 2x_0h + h^2} =$$

$$= \lim_{h\to\infty} \frac{|f(x_0)|}{x_0^2+2x_0h+h^2} + \lim_{h\to\infty} \frac{M|h|}{h^2+2x_0h+x_0^2} + \lim_{h\to\infty} \frac{|\bar{o}(h)|}{x_0^2+2x_0h+h^2}$$

מכיון

$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

<u>הסבר:</u>

ב ההגדרות השקולות הם 0 מכיוון שיש
שם מספר (קבוע - $f(x)/M$) חלק לכן
ששואף לאינסוף ($h$, $h^2$) רק הגבול הוא 0.
$\bar{\bar{o}}(h)$ קטן ביחס ל-$h$, והפוך הוא קטן
ביחס ל-$h^2$, כלומר מקיים הגדרה

$$\lim_{h\to\infty} \frac{|\bar{o}(h)|}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{\bar{o}(h)}{h^2} = 0$$

כוונתי $h\to 0$

$$0 \le \lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{x^2} \le 0$$

רק

לא כל כך ברור!

-8

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{x^2} = 0$$

רק

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$$

רק

אבל לא נכון...

לב: יש מבחן!
תשובות נכונות ומלאות.
(הבנה!)

$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + \bar{o}(h)$

$S_5 = 8.05551 \cdot 10^{-3}$

$g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2} = c \neq 0$

$g'(x) = \frac{f'(x)\cdot 2x - f(x) x^2}{x^4}$

$S_n < S < S_{n+1} < S_n + \frac{1}{6}$

$S - S_n > 0$

$S_{n+1} - S > 0$

$S_{n+1} - S_n > 0$

$\frac{1}{6} > S_{n+1} - S_n$

$S_{n+1} < S_n + \frac{1}{6}$

$S_{n+1} - S_n < \frac{1}{6}$

$a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}$

$b_{n+1} - b_n \leq \frac{1}{3}$

$(-1)^{n+1} \cdot \frac{\ln(n+1)}{n+1} - (-1)^n \cdot \frac{\ln n}{n} \leq \frac{1}{3}$

$\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} - \frac{\ln 5}{5}$

$S_n \leq S \leq S_{n+1}$

$S_{2n-1} < S < S_{2n}$

$f(x) = x^6 - 3x^4 - 24x^2 - 10$

$f'(x) = 6x^5 - 12x^3 - 48x$

$= 6x(x^4 - 2x^2 - 8)$

$t^2 - 2t - 8$

$t_{1,2} = \frac{2 \pm 6}{2}$

$f''(x) = 30x^4 - 36x^2 - 48$

$x = 0, \ x = \pm 2$

$f''(0) = -48$

$f''(2) = f''(-2) > 0$

$a_{n+1} - a_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n}$

$= \frac{n \ln(n+1) - (n+1)\ln n}{n(n+1)}$

$\int \ln x\, dx = x\ln x - x$

$\int \ln x \cdot \ln x\, dx$

$F = \ln x \qquad G' = \ln x$

$F' = \frac{1}{x} \qquad G = x\ln x - x$

$= \ln x(\ln x - 1) - \int \ln x - 1\, dx$