דף תרגילים 12

$201-88$ תשע"ח סמסטר ב'

תרגיל 1 נסתכל על משטח בקואורדינטות (x,y) בעל המטריקה

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix}$$

עבור $y>0$.

חשבו את עקמומיות גאוס בכל נקודה של המשטח.

פתרון 1 נשתמש באופרטור לפלס־בלטרמי. הגורם הקונפורמי הוא

$$\lambda(x,y) = f^2(x,y) = \frac{1}{y} > 0$$

כלומר

$$f(x,y) = y^{-\frac{1}{2}}$$

ו־

$$\begin{aligned} K &= -\Delta_{LB}\left(\ln\left(f\right)\right) \\ &= -\Delta_{LB}\left(\ln\left(y^{-\frac{1}{2}}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot y\cdot\Delta_0\left(\ln y\right) \\ &= \frac{y}{2}\left(\ln y\right)'' \\ &= \frac{y}{2}\left(\frac{-1}{y^2}\right) \\ &= \frac{-1}{2y} \end{aligned}$$

תרגיל 2 נסתכל על משטח בקואורדינטות (x,y) בעל המטריקה

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

עבור $y>0$. חשבו את עקמומיות גאוס בכל נקודה של המשטח.

פתרון 2

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

לכן

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix}$$

וכן

$$(g_{ij;1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (g_{ij;2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

רק $g_{22;2}=1$ שונה מ־0.

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}(g_{11;1} - g_{11;1} + g_{11;1})g^{11} = 0 \\
\Gamma^2_{11} &= \frac{1}{2}(g_{12;1} - g_{11;2} + g_{12;1})g^{22} = 0 \\
\Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2}(g_{11;2} - g_{12;1} + g_{21;1})g^{11} = 0 \\
\Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2}(g_{12;2} - g_{12;2} + g_{22;1})g^{22} = 0 \\
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}(g_{21;2} - g_{22;1} + g_{21;2})g^{11} = 0 \\
\Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2}(g_{22;2} - g_{22;2} + g_{22;2})g^{22} = \frac{1}{2y}
\end{aligned}$$

לפי *Theorema Egregium*, עקמומיות גאוס היא

$$\begin{aligned}
K &= \frac{2}{g_{11}}\left(\Gamma^2_{1[1,2]} + \Gamma^j_{1[1}\Gamma^2_{2]j}\right) \\
&= \frac{2}{g_{11}}\left(\Gamma^2_{1[1,2]} + \Gamma^1_{1[1}\Gamma^2_{2]1} + \Gamma^2_{1[1}\Gamma^2_{2]2}\right) \\
&= \frac{1}{g_{11}}\left(\Gamma^2_{11,2} - \Gamma^2_{12,1} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{21} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

תרגיל 3

נתונה ספירת היחידה S^2. מיצאו פרמטריזציה כמשטח סיבוב וחשבו עקמומיות גאוס $K(\theta,\phi)$ בשתי דרכים:

א. כדטרמיננטה של העתקת ווינגרטן.

ב. באמצעות הנוסחא
$$.K = \frac{2}{g_{11}}\left(\Gamma^2_{1[1,2]} + \Gamma^j_{1[1}\Gamma^2_{2]j}\right)$$

פתרון 3

א. פרמטריזציה
$$x(\theta,\phi) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$$

כזכור הנורמל של ספירה הממוקמת בראשית הצירים מקביל לרדיוס וקטור. אצלנו הספירה היא ספירת יחידה כלומר
$$n(\theta,\phi) = x(\theta,\phi)$$

בפרט
$$\begin{cases} n_1 = x_1 = 1x_1 + 0x_2 \\ n_2 = x_2 = 0x_1 + 1x_2 \end{cases}$$

כלומר
$$L^i_j = \delta^i{}_j$$

ובפרט
$$.K = 1$$

ב.
$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \sin^2\phi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן
$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \sin^{-2}\phi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

וכן
$$(g_{ij;1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (g_{ij;2}) = \begin{pmatrix} 2\sin\phi\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

רק $g_{11;2}=2\sin\phi\cos\phi$ שונה מ־0.

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}(g_{11;1}-g_{11;1}+g_{11;1})g^{11}=0\\
\Gamma^2_{11} &= \frac{1}{2}(g_{12;1}-\overbrace{g_{11;2}}^{2\sin\phi\cos\phi}+g_{12;1})g^{22}=-\sin\phi\cos\phi\\
\Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2}(\overbrace{g_{11;2}}^{2\sin\phi\cos\phi}-g_{12;1}+g_{21;1})g^{11}=\frac{\cos\phi}{\sin\phi}\\
\Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2}(g_{12;2}-g_{12;2}+g_{22;1})g^{22}=0\\
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}(g_{21;2}-g_{22;1}+g_{21;2})g^{11}=0\\
\Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2}(g_{22;2}-g_{22;2}+g_{22;2})g^{22}=0
\end{aligned}
$$

לפי $Theorema\ Egregium$, עקמומיות גאוס היא

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{2}{g_{11}}\left(\Gamma^2_{1[1,2]}+\Gamma^j_{1[1}\Gamma^2_{2]j}\right)\\
&= \frac{2}{g_{11}}\left(\Gamma^2_{1[1,2]}+\Gamma^1_{1[1}\Gamma^2_{2]1}+\Gamma^2_{1[1}\Gamma^2_{2]2}\right)\\
&= \frac{1}{g_{11}}\left(\Gamma^2_{11,2}-\Gamma^2_{12,1}+\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{21}-\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11}+\Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22}-\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}\right)\\
&= \sin^{-2}\phi\left(-\cos(2\phi)-0+0-\frac{\cos\phi}{\sin\phi}(-\sin\phi\cos\phi)+0-0\right)\\
&= \sin^{-2}\phi\left(-\cos^2\phi+\sin^2\phi+\cos^2\phi\right)\\
&= 1
\end{aligned}
$$

תרגיל 4 נתונה העקומה $\alpha(t)=\left(\cot(t),\frac{1}{2}\sin(2t)\right)$ עבור $0<t<\pi$.

א. סרטטו סקיצה של העקומה.

ב. מיצאו עקמומיות $k_\alpha(t)$ (אין צורך לפשט).

ג. הראו כי העקומה היא הגרף של הפונקציה $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

ד. באמצעות אופרטור בייטמן, מיצאו עקמומיות $k_\alpha(x,y)$. (אין צורך לפשט).

פתרון 4

א.

ב.

$$\alpha(t) = (\cot(t), \frac{1}{2}\sin(2t))$$
$$\alpha'(t) = (\frac{-1}{\sin^2(t)}, \cos(2t))$$
$$\alpha''(t) = (\frac{2\cos t}{\sin^3 t}, -2\sin(2t))$$

כלומר

$$\begin{aligned} k_\alpha(t) &= \frac{|det[\alpha' \ \alpha'']|}{|\alpha'|^3} \\ &= \frac{1}{\left|\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sin^2(t)} \\ \cos(2t) \end{pmatrix}\right|^3} \begin{vmatrix} \frac{-1}{\sin^2(t)} & \frac{2\cos t}{\sin^3 t} \\ \cos(2t) & -2\sin(2t) \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{\sin^4 t} + \cos^2(2t)\right)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{2\sin(2t)}{\sin^2 t} - \frac{2\cos t\cos(2t)}{\sin^3 t}\right) \end{aligned}$$

ג. כאשר $0 < t < \pi$ אז $\cot(t)$ רץ מ־ ∞ ל־ $-\infty$. כמו כן

$$f(x) = f(\cot t) = \frac{\cot t}{\cot^2 t + 1} = \frac{\frac{\cos t}{\sin t}}{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} + 1} = \frac{\frac{\cos t}{\sin t}}{\frac{1}{\sin^2 t}} = \sin t \cos t = \frac{1}{2}\sin(2t) = y$$

ד. כזכור עבור עקומה מישורית הנתונה המשוואה $F(x, y) = 0$ העקמומיות היא

$$\frac{|D_B(F)|}{|\nabla F|^3}$$

באשר

$$.D_B(F) = F_{xx}F_yF_y - 2F_{xy}F_yF_x + F_{yy}F_xF_x$$

כאן

$$F(x, y) = y - \frac{x}{x^2 + 1} = 0$$

יהיה יותר קל לכפול ב־ $x^2 + 1$ ולעבוד עם

$$F(x, y) = x^2y + y - x = 0$$

$$\begin{cases} F_x = 2xy - 1 \\ F_y = x^2 + 1 \\ F_{xx} = 2y \\ F_{xy} = 2x \\ F_{yy} = 0 \end{cases}$$

כלומר

$$k_\alpha(x,y) = \frac{|2y(x^2+1)^2 - 2(2x)(x^2+1)(2xy-1)|}{((2xy-1)^2 + (x^2+1)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

תרגיל 5 בתרגול ראינו את העקומה

$$\alpha(t) = \left(\sin(t), \frac{1}{2}\sin(2t)\right), \ t \in [0, 2\pi]$$

ע"ס סקיצה שלה הסקנו כי עקמומיות מסומנת כוללת היא 0. הראו זאת ישירות כלומר:

א. מיצאו את העקמומיות המסומנת בכל נקודה.

ב. חשבו את העקמומיות המסומנת הכוללת.

רמז: היעזרו בסימטריה של הפונקציות הטריגונומטריות סביב $x = \pi$ כלומר בנוסחאות

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin(\pi - \theta), \quad \cos(\pi + \theta) = \cos(\pi - \theta)$$

פתרון 5

א.

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \left(\sin(t), \frac{1}{2}\sin(2t)\right) \\ \alpha'(t) &= (\cos(t), \cos(2t)) \\ \alpha''(t) &= (-\sin(t), -2\sin(2t)) \end{aligned}$$

כלומר

$$\begin{aligned} \tilde{k_\alpha}(t) = \frac{det[\dot{\alpha} \ \ddot{\alpha}]}{|\dot{\alpha}|^3} &= \frac{1}{\left|\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}\right|^3} \begin{vmatrix} \cos(t) & -sin(t) \\ \cos(2t) & -2\sin(2t) \end{vmatrix} \\ &= \frac{-2\cos(t)\sin(2t) - \sin(t)\cos(2t)}{(\cos^2(t) + \cos^2(2t))^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

ב. כדי לחשב את

$$\int_0^{2\pi} \frac{-2\cos(t)\sin(2t) - \sin(t)\cos(2t)}{(\cos^2(t) + \cos^2(2t))^{\frac{3}{2}}} dt$$

נשתמש בהצבה $t = \pi + x$ ונקבל

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-2\cos(\pi + x)\sin(2(\pi + x)) - \sin(\pi + x)\cos(2(\pi + x))}{(\cos^2(\pi + x) + \cos^2(2(\pi + x)))^{\frac{3}{2}}} dx$$

כעת, לפי זוגיות $cos(x)$, אי־זוגיות $sin(x)$ ו־

$$\sin(\pi + x) = -\sin(\pi - x), \quad \cos(\pi + x) = \cos(\pi - x)$$

מקבלים שהאינטגרנד הוא אי־זוגי, כלומר האינטגרל הוא 0.