<u>שאלה 2.6</u>

יהי $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T(v_i)=0$ צירוף ליניארי. נוכיח שהוא טריוויאלי. T העתקה ליניארית ולכן:

$0=T\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T(v_i)$. מכאן, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\in\ker(T)$. כמו כן נתון, $v_1,\dots,v_n\in U$ וכן U

ת"מ של V. לכן $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\in U$. בסה"כ נקבל $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\in U\cap\ker(T)$. אבל נתון ש

$U\cap\ker(T)=\{0\}$ לכן $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i=0$. $v_1,\dots,v_n$ בת"ל ולכן $\alpha_i=0,\forall 1\le i\le n$.

<u>שאלה 2.7</u>

א. לא נכון - אם ניקח את העתקת האפס למשל.
משהו יותר מעניין: קחו את העתקת ההטלה: $T(x,y)=(x,0)$, $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$.
רואים שמתקיים הדרוש, ועם זאת – זוהי לא העתקת הזהות!

ב. נוכיח תחילה ש - $\ker(T)\cap im(T)=\{0\}$. יהי $v\in\ker(T)\cap im(T)$ ז"א $T(v)=0$ וכן קיים $w\in V$ כך ש $T(w)=v$ כעת על פי הנתון $T(T(w))=T(v)$ ומכיוון ש $T(v)=0$ נקבל $T(T(w))=0$ ומכיוון ש $T^2=T$ נקבל ש $T(T(w))=T(w)=v=0$.
כעת נוכיח ש $V=\ker(T)+im(T)$ יהי $v\in V$ אז $v=v-T(v)+T(v)$. כעת $T(v)\in im(T)$ ומכיוון ש $T^2=T$ נקבל $T(v-T(v))=T(v)-T(T(v))=0$ ולכן $v-T(v)\in\ker(T)$.

<u>שאלה 2.8</u>

נוכיח ש $\ker(T_1)=im(T_2)$. יהי $v\in\ker(T_1)$ על פי הנתון ב (א) נקבל $(T_1+T_2)(v)=v$. מכיוון ש-

$v\in\ker(T_1)$ נקבל $v=(T_1+T_2)(v)=T_1(v)+T_2(v)=0+T_2(v)=T_2(v)$ ולכן $v\in im(T_2)$.

יהי $v\in im(T_2)$ ז"א קיים w כך ש $T_2(w)=v$ כעת על פי הנתון בסעיף (ב) נקבל ש - $T_1(T_2(w))=0$ ולכן $T_1(v)=0$ ז"א $v\in\ker(T_1)$.

כעת על פי הנתון ב (ג) $T_1^2=T_1$ ועל פי תרגיל קודם $V=\ker(T_1)\oplus im(T_1)$. הוכחנו ש - $\ker(T_1)=im(T_2)$ ולכן $V=im(T_2)\oplus im(T_1)$.

הערה: שימו לב שבהוכחה בדרך זו אנו לא משתמשים בנתון $T_2^2 = T_2$.

ניתן להוכיח את ההכלה $\operatorname{Im} T_2 \subseteq \ker T_1$ גם בדרך אחרת ובהסתמכות על $T_2^2 = T_2$ תוך ויתור על הצורך בנתון בסעיף ב (מסתבר שיש נתון מיותר בשאלה), יהי $v \in im(T_2)$, ז"א קיים w כך ש $T_2(w) = v$. נשים לב שעפ"י סעיף ג' $T_2(v) = T_2{}^2(w) = T_2(w) = v$. עפ"י סעיף א נקבל $T_1(v) + T_2(v) = v$ ואם נציב את השוויון הקודם הרי ש- $T_1(v) + v = v$ ומכאן $T_1(v) = 0$ ז"א $v \in \ker(T_1)$. ומכאן ההוכחה מסתימת כמו בשלב הקודם.

<u>שאלה 2.11</u>

ב $\Leftarrow$ א

תהא $V \to V$ $0 \neq S:V \to V$ ז"א קיים $v \in V$ כך ש $S(v) \neq 0$. כעת נתון ש $T(S(v)) = 0$ ולכן $0 \neq S(v) \in \ker(T)$.

א $\Leftarrow$ ב

תהא $T:V \to V$ העתקה ליניארית כך ש $\ker(T) \neq \{0\}$ ז"א קיים $0 \neq v \in V$ שעבורו $T(v) = 0$.

כעת יהי $\{v_i\}_{i=1}^n$ בסיס של V. על פי משפט ההגדרה של העתקה ליניארית, קיימת העתקה ליניארית יחידה $S:V \to V$ שעבורה $S(v_i) = v$ לכל $1 \le i \le n$. כעת יהי $w \in V$. מכיוון ש - $\{v_i\}_{i=1}^n$ הוא בסיס של V קיימים $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ שעבורם $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ כעת T, S העתקות ליניאריות ולכן $TS(w) = TS(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i) = T(\sum_{i=1}^n \alpha_i S(v_i)) = T(\sum_{i=1}^n \alpha_i v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(v) = 0$.

<u>שאלה 2.15</u>

א. קל.

ב. נמצא תחילה את הגרעין:

צריך למצוא את המטריצות שעבורן מתקיים

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ז"א מתקיימים המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} a_{11}+2a_{21}=a_{11} \\ a_{12}+2a_{22}=2a_{11}+3a_{12} \\ 3a_{21}=a_{21} \\ 3a_{22}=2a_{21}+3a_{22} \end{cases}.$$

ז"א $a_{21}=0 \wedge a_{22}=a_{11}+a_{12}$ ולכן הבסיס הוא: $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

כעת נמצא את $im(T_A)$. הקבוצה $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ מהווה בסיס ל $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ולכן מספיק לחשב את

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נקבל שהבסיס הוא $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$.

<u>שאלה 2.16</u>

בכל הסעיפים ניעזר במשפט הדרגה: $\dim \operatorname{Im} T+\dim\ker T=\dim V$ ובעובדות הבאות: T על $\Leftrightarrow$ $\dim \operatorname{Im} T=\dim W$, T חח"ע $\Leftrightarrow$ $\dim\ker T=0$

א. אם $\dim V<\dim W$ אזי
$\dim \operatorname{Im} T=\dim V-\dim\ker T<\dim W-\dim\ker T\le \dim W$ ולכן
$\dim \operatorname{Im} T<\dim W$ ו- T אינה על.

ב. אם $\dim V>\dim W$ אזי
$\dim\ker T=\dim V-\dim \operatorname{Im} T>\dim W-\dim \operatorname{Im} T\ge 0$ ולכן $\dim\ker T>0$
וההעתקה אינה חח"ע.

ג. אם $\dim V=\dim W$ אזי:
T חח"ע $\Leftrightarrow$ $\dim\ker T=0$ $\Leftrightarrow$ $\dim \operatorname{Im} T=\dim V$ $\Leftrightarrow$
$\dim \operatorname{Im} T=\dim W$
$\Leftrightarrow$ T על.

שאלה 6.12

יהי $B=\{v_1,v_2\}$. $[T]_B = \begin{pmatrix} | & | \\ [T(v_1)]_B & [T(v_2)]_B \\ | & | \end{pmatrix}$. מצד שני,

$[T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. לכן,

$$T(v_1) = -1v_1 + 0v_2 = -v_1$$
$$T(v_2) = 2v_1 + v_2$$

ידוע שההעתקה היא העתקת שיקוף ביחס לציר ה-x ולכן אם נסמן $v_1=(x,y)$ אזי $T(x,y)=(x,-y)$ וכמו כן מהנתון הקודם $T(x,y)=(-x,-y)$ לכן $x=-x=0$.

אם ניקח $v_1=(0,1)$, ונסמן $v_2=(t,s)$. צריך להתקיים

$$T(v_2)=2v_1+v_2 \rightarrow T(s,t)=(0,2)+(s,t)$$

ובגלל שההעתקה היא שיקוף, $T(s,t)=(s,-t)$ ולכן מקבלים את המשוואה: $(0,2)+(s,t)=(s,-t) \rightarrow t=-1$. כעת נבחר את s להיות כך ש-v_1,v_2 יהיו בת"ל. למשל, אפשר לבחור: $B=\{(0,1),(1,-1)\}$.

שאלה 6.14

א. תחילה, נגדיר את ההעתקה לפי משפט ההגדרה:

$$\begin{aligned} T(1,0,0,0) &= (2,4,5,7) \\ T(0,1,0,0) &= (1,2,1,1) \\ T(0,0,1,0) &= (0,0,0,0) \\ T(0,0,0,1) &= (0,0,0,0) \end{aligned}$$

. (שימו לב ששני וקטורי הבסיס האחרונים לא היו חייבים להישלח לאפס, אבל כן למשהו תלוי ליניארית בשני וקטורי התמונה. זאת על מנת לא להגדיר את $\operatorname{Im}(T)$ מעבר לנתון).

כעת נמצא את ההעתקה בצורה מפורשת:

$$T(x,y,z,w)=T\left(x(1,0,0,0)+y(0,1,0,0)+z(0,0,1,0)+w(0,0,0,1)\right)=$$
$$=xT(1,0,0,0)+yT(0,1,0,0)+zT(0,0,1,0)+wT(0,0,0,1)=$$
$$=x(2,4,5,7)+y(1,2,1,1)=(2x+y,4x+2y,5x+y,7x+y)$$
$$\Rightarrow T(x,y,z,w)=(2x+y,4x+2y,5x+y,7x+y)$$

ב. + ג. נשלים את הווקטורים הנתונים לבסיס ונגדיר את ההעתקה לפי משפט ההגדרה:

$$T(1,3,7)=(0,0,0)$$
$$T(2,5,6)=(0,0,0)$$
$$T(0,0,1)=(1,2,3)$$

שימו לב: שני הווקטורים הראשונים חייבים להיות אפס, היות ומקורותיהם פורשים את הגרעין. הווקטור השלישי בתמונה יכול להיות ווקטור שרירותי. בחרנו דווקא את $(1,2,3)$ כי כך נפתור גם את הסעיף האחרון במכה אחת עם הנוכחי.

כעת, על מנת למצוא את ההעתקה בצורה מפורשת, עלינו לייצג ווקטור שרירותי במרחב לפי הבסיס הנתון: $(x,y,z)=\alpha(1,3,7)+\beta(2,5,6)+\gamma(0,0,1)$. נפתור את מערכת המשוואות המתאימה ונקבל: $\begin{cases}\alpha=-5x+2y\\ \beta=3x-y\\ \gamma=17x-8y+z\end{cases}$, ולכן:

$$T(x,y,z)=T\left((-5x+2y)(1,3,7)+(3x-y)(2,5,6)+(17x-8y+z)(0,0,1)\right)=$$
$$=(-5x+2y)T(1,3,7)+(3x-y)T(2,5,6)+(17x-8y+z)T(0,0,1)=$$
$$=(-5x+2y)(0,0,0)+(3x-y)(0,0,0)+(17x-8y+z)(1,2,3)=$$
$$\Rightarrow T(x,y,z)=(17x-8y+z,34x-16y+2z,51x-24y+3z)$$

תרגיל לא מהחוברת

תהי $T:\mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}_2[x]$ העתקה ליניארית. יהיו

$E=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\8&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\right\}$ ו-

$F=\left\{3x^2+2x+1,\ x^2+3x+2,\ 2x^2+x+3\right\}$ בסיסים עבור $\mathbb{R}^{2\times2}$ ו- $\mathbb{R}_2[x]$

$T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=ax^2-2bx+a+d$, מצא $[T]_F^E$.

נסמן ב- S_1 את הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^{2\times 2}$ וב- S_2 את הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_2[x]$. נמצא את המטריצה הדרושה באמצעות הנוסחא:

$$[T]_F^E = [I]_F^{S_2}[T]_{S_2}^{S_1}[I]_{S_1}^E .$$

נמצא כל אחת מהמטריצות.

$$[I]_{S_1}^E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$[I]_F^{S_2} = \left([I]_{S_2}^F\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{S_2}^{S_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן, לאחר שמחשבים את המכפלה, מקבלים
את המבוקש.