אקסיומות ZFC לתורת הקבוצות

ZFC = **Z**ermelo-**F**raenkel & Axiom of **C**hoice

ישנם שני פרדיקטים יסודיים, שוויון ($=$) ושייכות ($\in$), ושבע אקסיומות. לכל אקסיומה מובאים להלן ניסוח לא פורמלי בעברית וגם נוסחה לוגית מפורשת.

1. אקסיומת ההיקפיות: (Axiom of Extensionality)
שתי קבוצות הן שוות אם ורק אם יש להן אותם איברים.
$\forall x \forall y \, [\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \leftrightarrow x = y]$

2. אקסיומת האיחוד: (Axiom of Union)
לכל קבוצה קיים האיחוד של איבריה.
$\forall F \exists A \forall y \forall x \, [(x \in y \wedge y \in F) \to x \in A]$

3. אקסיומת קבוצת החזקה: (Axiom of Power Set)
לכל קבוצה קיימת קבוצת החזקה שלה.
$\forall x \exists y \forall z \, (z \subseteq x \to z \in y)$
כאשר מגדירים
$(z \subseteq x) \leftrightarrow \forall q (q \in z \to q \in x)$

4. מערכת אקסיומות ההחלפה: (Axiom Schema of Replacement)
לכל קבוצה A ונוסחה (פרדיקט) $P(x, y)$ המגדירה פונקציה על A, קיימת קבוצה שאיבריה הם בדיוק התמונות של איברי A על ידי הפונקציה.
פורמלית: אם P היא נוסחה עם משתנים חופשיים מתוך $x, y, A, w_1, \ldots, w_n$ (אך לא B),
$\forall A \forall w_1 \ldots \forall w_n \, [\forall x (x \in A \to \exists! y \, P) \to \exists B \forall y (y \in B \leftrightarrow \exists x (x \in A \wedge P))]$

5. אקסיומת האינסוף: (Axiom of Infinity)
קיימת קבוצה אינסופית.
פורמלית: קיימת קבוצה המכילה כאיבר את הקבוצה הריקה, ולכל איבר y מכילה גם את $y \cup \{y\}$ כאיבר.
$\exists x \, [\varnothing \in x \wedge \forall y (y \in x \to (y \cup \{y\}) \in x)]$

6. אקסיומת היסוד\הרגולריות: (Axiom of Foundation/Regularity)
כל קבוצה לא ריקה מכילה איבר שזר לה (כקבוצה).
$\forall x \, [\exists a (a \in x) \to \exists y (y \in x \wedge \neg \exists z (z \in y \wedge z \in x))]$

7. אקסיומת הבחירה: (Axiom of Choice)
לכל קבוצה x שכל איבריה קבוצות לא ריקות, קיימת פונקציה המתאימה לכל $y \in x$ איבר של y.
$\forall x \, [\forall y (y \in x \to \exists z (z \in y)) \to \exists f \, (\mathrm{Fun}(f, x) \wedge \forall y (y \in x \to \exists z (z \in y \wedge \{\{y\}, \{y, z\}\} \in f)))]$
כאשר $\mathrm{Fun}(f, x)$ הוא פרדיקט האומר ש- f היא פונקציה עם תחום הגדרה x.

במקור (Z = Zermelo) היו שלוש אקסיומות נוספות; ב- ZFC הן נובעות מאקסיומות 1-5 לעיל.

8. אקסיומת הקבוצה הריקה: (Axiom of Empty Set)
קיימת קבוצה ללא איברים.
$\exists x \forall y \neg(y \in x)$

9. אקסיומת הזוג: (Axiom of Pairing)
לכל שתי קבוצות קיימת קבוצה המכילה את שתיהן כאיברים.
$\forall x \forall y \exists z\, (x \in z \wedge y \in z)$

10. מערכת אקסיומות הפירוט\הפרדה\הכלה:
(Axiom Schema of Specification/Separation/Comprehension)
לכל קבוצה A ונוסחה (פרדיקט) $P(x)$ קיימת תת-הקבוצה $\{x \in A \,|\, P(x)\}$.
פורמלית: אם P היא נוסחה עם משתנים חופשיים מתוך $x, A, w_1, \ldots, w_n$ (אך לא B),
$\forall A \forall w_1 \ldots \forall w_n \exists B \forall x\, [x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge P)]$

הערה: את אקסיומות 2, 3, 9 ניתן לנסח כך שהקבוצות שקיומן נדרש מכילות בדיוק את האיברים הנדרשים (ולא יותר); אך למעשה ניתן להסיק זאת מהנוסח הנתון בעזרת שימוש במערכת האקסיומות 4 (או 10).

Z = {1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10}

ZFC = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

מקורות:

ויקיפדיה בעברית (תורת הקבוצות האקסיומטית)

וויקיפדיה באנגלית (Zermelo-Fraenkel set theory),

בתוספת עיבוד.