מתמטיקה לכימאים פתרון תרגיל 9

עוזי חרוש ועולא אמארה

תרגיל 1. פתרו את המשוואה הבאות סביב $x_0 = 0$

1. $4xy'' + 2y' + y = 0$

פתרון. ראשית נביא את המשוואה לצורה רגילה

$$y'' + \frac{1}{2x}y' + \frac{1}{4x}y = 0$$

מכאן

$$\begin{cases} p(x) = \frac{1}{2x} \\ q(x) = \frac{1}{4x} \end{cases}$$

נשים לב שיש נקודה סינגולרית ב-$x_0 = 0$ כי

$$\lim_{x\to x_0} xp(x) = \frac{1}{2}$$

ו-

$$\lim_{x\to x_0} x^2 q(x) = 0$$

לכן $x_0 = 0$ היא נקודה סינגולרית רגולרית. נחפש פתרון מהצורה

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

אם נגזור ונציב במשוואה נקבל

$$4x\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(n+r)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{k=-1}^{\infty} 4a_{k+1}(k+1+r)(k+r)x^{k+r} + \sum_{k=-1}^{\infty} 2a_{k+1}(k+1+r)x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r} = 0$$

$$\begin{cases} 4a_0 r(r-1) + 2a_0 r = 0 \\ 4a_{k+1}(k+1+r)(k+r) + 2a_{k+1}(k+1+r) + a_k = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4r(r-1) + 2r = 0 \\ 4a_{k+1}(k+1+r)(k+r) + 2a_{k+1}(k+1+r) + a_k = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2r^2 - r = 0 \\ a_{k+1}\left[4(k+1+r)(k+r) + 2(k+1+r)\right] = -a_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2r^2 - r = 0 \\ a_{k+1} = \frac{-a_k}{4(k+1+r)(k+r)+2(k+1+r)} \end{cases}$$

כלומר $r_{1,2} = 0, \frac{1}{2}$ ומתקיים הכלל

$$a_{k+1} = \frac{-a_k}{4(k+1+r)(k+r)+2(k+1+r)}$$

עבור $r_1 = 0$ נקבל

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

כאשר a_n מתקיים

$$a_{k+1} = \frac{-a_k}{4(k+1)k+2(k+1)}$$

עבור $r_2 = \frac{1}{2}$ נקבל

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+\frac{1}{2}}$$

כאשר b_n מתקיים

$$b_{k+1} = \frac{-b_k}{4\left(k+\frac{3}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right)+2\left(k+\frac{3}{2}\right)}$$

והפתרון הכללי הוא

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

2. $x^2y'' + xy' + (x-2)y = 0$

פתרון. ראשית נביא את המשוואה לצורה רגילה

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x-2}{x^2}y = 0$$

מכאן

$$\begin{cases} p(x) = \frac{1}{x} \\ q(x) = \frac{x-2}{x^2} \end{cases}$$

נשים לב שיש נקודה סינגולית ב-$x_0 = 0$כי

$$\lim_{x\to x_0} xp(x) = 1$$

ו-

$$\lim_{x\to x_0} x^2q(x) = -2$$

לכן $x_0 = 0$ היא נקודה סינגולרית רגולרית. נחפש פתרון מהצורה

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

אם נגזור ונציב במשוואה נקבל

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2} + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r-1} + (x-2)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} + \sum_{n=0}^{\infty} -2a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{k=-1}^{\infty} a_{k+1} (k+1+r)(k+r) x^{k+r+1} + \sum_{k=-1}^{\infty} a_{k+1} (k+1+r) x^{k+r+1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r+1} + \sum_{k=-1}^{\infty} -2a_{k+1} x^{k+r+1} = 0$$

$$\begin{cases} a_0 r(-1+r) + a_0 r - 2a_0 = 0 \\ a_{k+1}(k+1+r)(k+r) + a_{k+1}(k+1+r) + a_k - 2a_{k+1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r(-1+r) + r - 2 = 0 \\ a_{k+1}\left[(k+1+r)(k+r) + (k+1+r) - 2\right] = -a_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} r^2 - 2 = 0 \\ a_{k+1} = \frac{-a_k}{(k+1+r)^2-2} \end{cases}$$

כלומר $r_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ ומתקיים הכלל

$$a_{k+1} = \frac{-a_k}{(k+1+r)^2 - 2}$$

עבור $r_{1,2} = \sqrt{2}$ נקבל

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\sqrt{2}}$$

כאשר a_n מתקיים

$$a_{n+1} = \frac{-a_n}{\left(k+1+\sqrt{2}\right)^2 - 2}$$

עבור $r_2 = \frac{1}{2}$ נקבל

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-\sqrt{2}}$$

כאשר b_n מתקיים

$$b_{n+1} = \frac{-b_n}{\left(k+1-\sqrt{2}\right)^2 - 2}$$

והפתרון הכללי הוא

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

תרגיל 2. חשבו את התמרת לפלס של הפונקציות הבאות:

1. $f(t) = t^2$

פתרון. פשוט נחשב את האינגרל של התמרת לפלס

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt &&= \\
&= \int_0^\infty e^{-st} t^2 dt &&= \begin{bmatrix} u = t^2 & dv = e^{-st} \\ du = 2t & v = \frac{e^{-st}}{-s} \end{bmatrix} \\
&= \left[t^2 \frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty - \int_0^\infty 2t \frac{e^{-st}}{-s} dt &&= \begin{bmatrix} u = t & dv = e^{-st} \\ du = 1 & v = \frac{e^{-st}}{-s} \end{bmatrix} \\
&= \frac{2}{s}\left[t \frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty - \frac{2}{s}\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{-s} dt &&= \frac{1}{s^2} \\
& -\frac{2}{s}\left[\frac{e^{-st}}{s^2}\right]_0^\infty &&= -\frac{2}{s^2}
\end{aligned}$$

2. $f(t) = \cos at$

פתרון. פשוט נחשב את האינגרל של התמרת לפלס

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt &&= \\
&= \int_0^\infty e^{-st} \cos at dt &&= \begin{bmatrix} u = \cos at & dv = e^{-st} \\ du = -a\sin(at) & v = \frac{e^{-st}}{-s} \end{bmatrix} \\
&= \left[\cos at \frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty - \int_0^\infty a\sin(at)\,\frac{e^{-st}}{s} dt &&= \\
&= \frac{1}{s} - \frac{a}{s}\int_0^\infty \sin(at)\,e^{-st} dt &&= \begin{bmatrix} u = \sin at & dv = e^{-st} \\ du = a\cos(at) & v = \frac{e^{-st}}{-s} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{s} - \frac{a}{s}\left[\left[\sin at \frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty - \int_0^\infty a\cos(at)\,\frac{e^{-st}}{-s} dt\right] &&= \\
&= \frac{1}{s} - \frac{a}{s}\left[\frac{a}{s}\int_0^\infty \cos(at)\,e^{-st} dt\right] &&= \frac{1}{s} - \frac{a^2}{s^2}\mathfrak{L}(s)
\end{aligned}$$

לכן

$$\left(1 + \frac{a^2}{s^2}\right)\mathfrak{L}(s) = \frac{1}{s}$$
$$\Downarrow$$
$$\left(1 + \frac{a^2}{s^2}\right)\mathfrak{L}(s) = \frac{s}{s^2+a^2}$$

3. $f(t) = te^{at}$

פתרון. פשוט נחשב את האינגרל של התמרת לפלס

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{L}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt &= \\
& \int_0^\infty e^{-st} t e^{at} dt & \\
&= \int_0^\infty e^{(-s+a)t} t dt &= \begin{bmatrix} u = t & dv = e^{(-s+a)t} \\ du = 1 & v = \frac{e^{(-s+a)t}}{-s+a} \end{bmatrix} \\
&= \left[t \frac{e^{-st}}{-s+a} \right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{(-s+a)t}}{-s+a} dt &= \\
&= 0 - \left[\frac{e^{-st}}{(-s+a)^2} \right]_0^\infty &= \frac{1}{(-s+a)^2}
\end{aligned}
$$

בהצלחה!