

מבחן בחשבון אינפיניטסמלי I מועד א'

ענו על השאלות הבאות. כל שאלה שוה 18 נקודות. חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט. אתם חייבים לנמק כל תשובה. משך הבחינה שלוש שעות.

- ענו על אחת משתי השאלות הבאות:
 - א. (לפי ניסוח פרופסור אגרנובסקי) צטטו והוכיחו את משפט ווירשטראס על קיום מקסימום ומינימום.
 - ב. (לפי ניסוח ד"ר הורוביץ) צטטו והוכיחו את המשפט השני של ווירשטראס על פי המשפט הראשון (שאינכם צריכים להוכיח)
- א. חשבו: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3} \right)$ ב. חשבו: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3+2x} - \sqrt{x^2-2x})$
- קבעו אם כל טור מתכנס/מתכנס בהחלט/מתבדר:
 - א. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+\sin(n^2)}{n^2}$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{(n)!}$
- נגדיר $f(x) = \begin{cases} ax+b, & x \leq 1 \\ 2x^2, & x > 1 \end{cases}$ מצאו את כל המספרים a ו b כך ש:
 - א. f רציפה בכל \mathbb{R} . ב. f גזירה (או דיפרנציאבילית) בכל \mathbb{R} ג. f גזירה (או דיפרנציאבילית) פעמיים בכל \mathbb{R} .
- נניח שהפונקציה f(x) מוגדרת ורציפה בקטע פתוח (a,b), ונניח ש x_1, x_2, \dots, x_n הן נקודות כלשהן ב (a,b). הוכיחו שקיימת $c \in (a,b)$ כך ש $f(c) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$
- ענו על אחת משתי השאלות הבאות:
 - א. נגדיר $f(x) = \frac{1}{2+x^2}$. חשבו את הנגזרות $f^{(2012)}(0), f^{(2013)}(0)$.
 - ב. קרבו את $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ עם שגיאה קטנה מ 10^{-3} (ע"פ הערכת השארית) בהצלחה.