לינארית 1 הרצאה 7

<u>תזכורת:</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. תהי $S \subseteq V$ תת-קבוצה.

1. אנו אומרים ש-S **פורשת** את V, אם כל וקטור ב-V ניתן להצגה כצירוף ליניארי של איברי S.

כלומר, לכל $v \in V$ קיימים וקטורים $v_1, \dots, v_k \in S$ וסקלרים $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in F$ כך ש:

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$$

למשל, במרחב $V = \mathbb{R}^3$, הקבוצה: $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (3,6,25)\}$ פורשת, מכיוון שכל וקטור $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ אפשר לרשום באופן הבא, למשל:

$$(x,y,z) = x \cdot (1,0,0) + y \cdot (0,1,0) + z \cdot (0,0,1) + 0 \cdot (3,6,25)$$

הוקטור $(3,6,25)$ "מיותר" – גם בלעדיו, הקבוצה S הייתה פורשת. הבחנו שהוא צירוף ליניארי של שאר הוקטורים בקבוצה.

2. אנו אומרים ש-S בת"ל (בלתי תלויה ליניארית) אם לכל וקטורים

$v_1, \ldots, v_k \in S$ וסקלרים $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in F$ מתקיים:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0 \Longrightarrow \forall i : \alpha_i = 0$$

המקרה היחיד שבו צירוף ליניארי של איברי הקבוצה מתאפס, הוא המקרה שבו כל הסקלרים הם אפס.

הקבוצה $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (3,6,25)\}$ איננה בת"ל, למשל:

$$3 \cdot (1,0,0) + 6 \cdot (0,1,0) + 25 \cdot (0,0,1) - 1 \cdot (3,6,25) = 0$$

אם יש וקטור "מיותר", כזה שהוא צירוף ליניארי של איברי הקבוצה האחרים, הקבוצה לא בת"ל.

הערה: ברמה הטכנית, ראינו שכדי לבדוק האם קבוצת וקטורים $\{v_1, \ldots, v_k\}$ היא בת"ל, נשים אותם כעמודות מטריצה ונדרג; אין משתנה חופשי אם ורק אם הקבוצה בת"ל.

ישנו אלגוריתם נוסף, נציג אותו מבלי להיכנס לעומק ללמה הוא עובד (או מתי): כדי לבדוק האם קבוצת וקטורים $\{v_1, \ldots, v_k\}$ היא בת"ל, נשים אותם כשורות מטריצה ונדרג. אין שורת אפסים אם ורק אם הקבוצה בת"ל.

למשל, נבדוק האם הקבוצה: $\{x^2 + 2x + 5, 2x^2 - x + 1, 2x^2 + 2x\}$ היא בת"ל (ב-$\mathbb{R}_2[x]$). כדי לשים פולינומים בשורות מטריצה, "נתרגם" אותם

לוקטורים, למשל באופן הבא: $ax^2+bx+c\mapsto(a,b,c)$:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 2 & - & 11\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3-2R_1\to R_3]{R_2-2R_1\to R_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & -5 & -9\\ 0 & -2 & -10\end{pmatrix}$$

גם בלי לדרג עד הסוף, אנו רואים שאף לא שורה לא תתאפס. לכן, הקבוצה בת"ל.

נתחיל במסע – נקשר בין בת"ל ופורשת וננסח פורמלית מהו וקטור "מיותר"...

<u>משפט:</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F ותהי $S\subseteq V$. שלושת התנאים הבאים שקולים:

א. S תלויה ליניארית.

ב. קיים $v\in S$ כך ש-v צירוף ליניארי של איברי $S\setminus\{v\}$.

ג. קיים $v\in S$ כך ש: $sp(S)=sp(S\setminus\{v\})$.

ג' מתאר את מה ש"הגדרנו" כ"מיותר" – הקבוצה פורשת גם בלעדיו; המרחב הנפרש הוא אותו מרחב גם בלעדיו. ב' מתאר את מה שחשבנו לאחר מכן – וקטור הוא "מיותר" אם הוא צירוף ליניארי של איברי הקבוצה האחרים. א' מקשר זאת לתלות ליניארית.

<u>הוכחה:</u>

אנו צריכים להוכיח שא' אם ורק אם ב' אם ורק אם ג'.

מספיק להוכיח שא' גורר את ב' שגורר את ג' שגורר את א'.

א' גורר ב':

נתון ש-S תלויה ליניארית, צ"ל שקיים $v \in S$ כך ש-v צירוף ליניארי של איברי $S\backslash\{v\}$.

לפי ההגדרה, S תלויה ליניארית פירושו שקיימים וקטורים $v_1, \dots, v_k \in S$ וסקלרים $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in F$ כך ש: $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$, כאשר $\exists i : \alpha_i \neq 0$.

את הצירוף הליניארי שמתאפס אפשר לרשום גם כך:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_i v_i + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \dots + \alpha_k v_k = 0$$

לכן:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \dots + \alpha_k v_k = -\alpha_i v_i$$

מכיוון ש: $\alpha_i \neq 0$, אפשר לצמצם ב-$-\alpha_i$:

$$-\frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_i} v_k = v_i$$

קיבלנו ש-v_i הוא צירוף ליניארי של איברי $S\backslash\{v_i\}$, כנדרש.

ב' גורר ג':

נתון שקיים $v \in S$ כך ש-v צירוף ליניארי של איברי $S\backslash\{v\}$, צ"ל שקיים $v \in S$ כך ש: $sp(S) = sp(S\backslash\{v\})$. נראה שזה אותו v.

נשים לב - אנו רוצים להוכיח ש: $sp\left(S\right) = sp\left(S\backslash\left\{v\right\}\right)$, שוויון בין קבוצות, ולכן נשתמש בהכלה דו כיוונית. לפני כן, נזכיר ש: $sp\left(A\right)$ הוא קבוצת כל הצירופים הליניאריים של וקטורים מ-A.

מצד אחד, ברור ש: $sp\left(S\right) \supseteq sp\left(S\backslash\left\{v\right\}\right)$, כי כל וקטור $u \in sp\left(S\backslash\left\{v\right\}\right)$ אפשר לרשום כך:

$$u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k, v_1, \ldots, v_k \in S\backslash\left\{v\right\}$$

מכיוון ש: $S\backslash\left\{v\right\} \subseteq S$, אפשר פשוט לומר:

$$u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k, v_1, \ldots, v_k \in S$$

ולכן: $u \in sp\left(S\right)$.

<u>הערה</u>: נשים לב שאם $A \subseteq B$ אז: $sp\left(A\right) \subseteq sp\left(B\right)$.

מצד שני, צ"ל $sp\left(S\right) \subseteq sp\left(S\backslash\left\{v\right\}\right)$. אם כן, יהי $u \in sp\left(S\right)$. כלומר, קיימים $v_1, \ldots, v_k \in S$ ו-$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in F$ כך ש: $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$.

אם $v \neq v_i$ לכל i, בפשטות: $v_1, \ldots, v_k \in S\backslash\left\{v\right\}$ ולכן: $u \in sp\left(S\backslash\left\{v\right\}\right)$.

אם קיים i כך ש: $v_i = v$, מכיוון שנתון ש-v צירוף ליניארי של איברי $S\backslash\left\{v\right\}$ - קיימים $w_1, \ldots, w_n \in S\backslash\left\{v\right\}$ וסקלרים $\beta_1, \ldots, \beta_n \in F$ כך ש: $v_i = \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n$.

כעת, נוכל לרשום:

$$u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_i v_i + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \alpha_k v_k =$$

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_i \left(\beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n\right) + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \alpha_k v_k$$

כלומר, u צירוף ליניארי של: $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_n \in$ $S \backslash \{v\}$, ולכן: $u \in sp\left(S \backslash \{v\}\right)$, כנדרש.

ג' גורר א':

נתון שקיים $S \in v$ כך ש: $sp\left(S\right) = sp\left(S \backslash \{v\}\right)$, צ"ל ש-$S$ תלויה ליניארית.

נתבונן בוקטור v. מכיוון ש: $v \in S$, $v \in sp\left(S\right)$. לפי הנתון, $sp\left(S\right) = sp\left(S \backslash \{v\}\right)$, ולכן $v \in sp\left(S \backslash \{v\}\right)$.

מהגדרת המרחב הנפרש, קיימים $w_1, \ldots, w_n \in S \backslash \{v\}$ וסקלרים $\beta_1, \ldots, \beta_n \in$ F כך ש:

$$v = \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n$$

לכן:

$$\beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n - v = 0$$

זהו צירוף ליניארי של איברים מ-S שמתאפס, ולא כל הסקלרים המשתתפים בו שווים ל-0. לכן, S תלויה ליניארית, כנדרש.

<u>למה ($lemma$):</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F.

א. תהי $A\subseteq V$ בת"ל ויהי $v\in V$ כך ש: $v\notin A$. אזי, $A\cup\{v\}$ בת"ל אם ורק אם $v\notin sp\left(A\right)$.

אם הוקטור לא "מיותר", הקבוצה לא נהיית תלויה כשמוסיפים אותו.

למשל, $A=\{(1,0,0),(0,0,1)\}$ בת"ל, הוקטור $(0,1,0)\notin sp\left(A\right)$ ואכן כשנוסיף אותו ל-A הקבוצה עדיין תישאר בת"ל.

מצד שני, כשנוסיף את $(1,1,1)$ ל-A היא תישאר בת"ל, ואכן: $(1,1,1)\notin sp\left(A\right)$...

ב. תהי $A\subseteq V$ בת"ל ויהי $v\in A$. אזי, $A\backslash\{v\}$ לא פורשת את V.

אם הקבוצה בת"ל אין בה וקטורים "מיותרים" ולכן כשמורידים אחד מהם הקבוצה כבר לא פורשת.

<u>הוכחה:</u>

א. $\rightarrow$: נתון ש-$A\cup\{v\}$ בת"ל, צ"ל: $v\notin sp\left(A\right)$.

נניח בשלילה ש-$v\in sp\left(A\right)$. מכיוון ש-$v\notin A$ מצד אחד, ומצד שני v הוא צירוף ליניארי של איברי A. כלומר, v הוא צירוף ליניארי של איברי $A=\left(A\cup\{v\}\right)\backslash\{v\}$, ולכן – לפי המשפט הקודם – הקבוצה $A\cup\{v\}$ תלויה ליניארית (זה ב' גורר א', כאשר: $S=A\cup\{v\}$), וזו סתירה.

$\leftarrow$: נתון ש: $v\notin sp\left(A\right)$, צ"ל: $A\cup\{v\}$ בת"ל.

נניח בשלילה שהקבוצה $A\cup\{v\}$ תלויה ליניארית – קיימים $v_1,\ldots,v_k\in A\cup\{v\}$ ו-$\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in F$ כך ש: $\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_kv_k=0$ וקיים i עבורו:

$\alpha_i \neq 0$. אפשר לרשום:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_i v_i + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \alpha_k v_k = 0$$

אם $v_j \neq v$ לכל j, הצירוף הליניארי הזה הוא צירוף ליניארי של איברי A, וכך נקבל ש-A תלויה ליניארית, בסתירה לכך ש-A בת"ל.

אם קיים j כך ש: $v_j = v$, אם $\alpha_j = 0$ שוב נקבל שהצירוף הליניארי הוא צירוף ליניארי של איברי A ושוב סתירה.

לבסוף, אם קיים j כך ש: $v_j = v$ וגם $\alpha_j \neq 0$, נוכל לרשום:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{j-1} v_{j-1} + \alpha_j v + \alpha_{j+1} v_{j+1} + \cdots + \alpha_k v_k = 0$$

נעביר אגף:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{j-1} v_{j-1} + \alpha_{j+1} v_{j+1} + \cdots + \alpha_k v_k = -\alpha_j v$$

נצמצם ב-$-\alpha_j$ ונקבל:

$$-\frac{\alpha_1}{\alpha_j} v_1 - \cdots - \frac{\alpha_k}{\alpha_j} v_k = v$$

מה קיבלנו? v הוא צירוף ליניארי של איברים מ-A (כי הם שייכים ל-$A \cup \{v\}$ והם שונים מ-v...), כלומר $v \in sp(A)$, וזו סתירה למה שהנחנו

בשלילה.

ב. נתון ש-A בת"ל, $v \in A$. צ"ל ש-$A\backslash\{v\}$ לא פורשת.

מכיוון ש-A בת"ל, גם $A\backslash\{v\}$ בת"ל. נניח בשלילה ש-$A\backslash\{v\}$ פורשת, כלומר: $sp\left(A\backslash\{v\}\right)=V$.

לכן, $v \in sp\left(A\backslash\{v\}\right)$, כלומר v הוא צירוף ליניארי של איברי $A\backslash\{v\}$.

לפי המשפט הקודם, נקבל שהקבוצה A תלויה ליניארית וסתירה.

<u>למת ההחלפה של שטייניץ:</u>

נקראת גם "משפטון".

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. תהיינה $A, B \subseteq V$ כך ש-A בת"ל ו-B פורשת.

אזי, לכל $v \in A$ קיים $w \in B$ כך ש: $w \notin A\backslash\{v\}$ וגם $\left(A\backslash\{v\}\right)\cup\{w\}$ בת"ל.

כל וקטור בקבוצה בת"ל אפשר להחליף בוקטור מקבוצה פורשת – קיים וקטור בקבוצה הפורשת שאם נכניס אותו לקבוצה הבת"ל במקום, הקבוצה תישאר בת"ל.

אם הקבוצה בת"ל – אין בה אף וקטור מיותר. כשמורידים ממנה וקטור, יש בה "חוסר". הלמה טוענת שאת ה"חוסר" הזה אפשר למלא ע"י וקטור מהקבוצה הפורשת, לא משנה מי הוקטור שהורדנו מהקבוצה הבת"ל.

<u>הוכחה:</u>

נניח בשלילה שקיים $v \in A$ כך שלכל $w \in B$, הקבוצה $\left(A\backslash\{v\}\right)\cup\{w\}$ תלויה ליניארית.

לכל $w \in B$, יכול להתקיים אחד משני מקרים: $w \in A\backslash\{v\}$ או $w \notin$

$.A\setminus\{v\}$

אם $w\in A\setminus\{v\}$, אז: $(A\setminus\{v\})\cup\{w\}=A\setminus\{v\}$, כלומר $A\setminus\{v\}$ תלויה ליניארית, ולכן גם A תלויה ליניארית וסתירה.

לכן, כל $w\in B$ מקיים: $w\notin A\setminus\{v\}$. מכיוון ש-$(A\setminus\{v\})\cup\{w\}$ תלויה ליניארית, לפי מה שהוכחנו מקודם מקבלים: $w\in sp(A\setminus\{v\})$. לכן, $B\subseteq sp(A\setminus\{v\})$.

מכיוון ש-$sp(B)$ הוא המרחב הוקטורי הקטן ביותר שמכיל את B, נקבל שבהכרח: $sp(B)\subseteq sp(A\setminus\{v\})$.

כעת, מכיוון ש-B פורשת, $sp(B)=V$, ולכן: $V\subseteq sp(A\setminus\{v\})$. מצד שני, $sp(A\setminus\{v\})\subseteq V$ (הכל נמצא ב-V) ולכן: $V=sp(A\setminus\{v\})$.

מכאן, $A\setminus\{v\}$ פורשת.

אם כן, הורדנו איבר מהקבוצה A וקיבלנו קבוצה פורשת, לכן לפי סעיף ב' של הלמה הקודמת נקבל ש-A לא בת"ל, וסתירה.

<u>בסיסים:</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. אנו אומרים ש-V **נוצר סופית** אם קיימת קבוצה סופית שפורשת אותו – קיימת $B\subseteq V$ סופית עבורה: $sp(B)=V$.

נתמקד במרחבים נוצרים סופית בלבד, אלא אם נאמר מפורשות אחרת.

המרחבים $F^{m\times n},F^n,F_n[x]$ הם נוצרים סופית. המרחב $F[x]$ (כל הפולינומים) הוא לא נוצר סופית.

<u>משפט:</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F.

תהיינה $A,B\subseteq V$ כך ש-A בת"ל ו-B פורשת. אזי: $|A|\le|B|$.

בקבוצה בת"ל אין יותר איברים מבקבוצה פורשת.

<u>הוכחה:</u>

ראשית, נניח ש-B סופית, כלומר: $|B| = n$, וצ"ל: $|A| \leq n$.

נניח בשלילה ש: $|A| \geq n+1$, כלומר קיימים $v_1, \ldots, v_{n+1} \in A$ שונים זה מזה.

A בת"ל, ולכן לפי למת ההחלפה קיים $w_1 \in B$ כך ש: $w_1 \neq v_2, \ldots, v_{n+1}$ ו"מחליף" את v_1, כלומר: $\{w_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n+1}\}$ בת"ל.

באופן דומה, קיים $w_2 \in B$ שיחליף את v_2, וכן הלאה...עד שנגיע ל-$w_n \in B$ שיחליף את v_n, כלומר: $\{w_1, w_2, \ldots, w_n, v_{n+1}\}$ בת"ל.

מכיוון ש: $|B| = n$, $B = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$. B פורשת, לכן: $sp(B) = V$. לכן, $v_{n+1} \in sp(B)$, כלומר v_{n+1} הוא צירוף ליניארי של שאר איברי הקבוצה $\{w_1, w_2, \ldots, w_n, v_{n+1}\}$ ולכן היא תלויה ליניארית וסתירה.

אם כן, מכיוון שהמרחב נוצר סופית, קיימת קבוצה פורשת C שהיא סופית. מה שהוכחנו עכשיו, זה שאם קבוצה פורשת היא סופית, ב-A (לא משנה מי הקבוצה הפורשת) יש אותו מספר איברים לכל היותר. בפרט, A סופית, ואכן לכל קבוצה פורשת C (גם אם היא סופית וגם אם לא) מתקיים: $|A| \leq |C|$.

כעת, יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. קבוצה $B \subseteq V$ נקראת **בסיס**, אם ורק אם היא בת"ל ופורשת.

למשל, $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ בסיס, כי היא בת"ל ופורשת.

באופן כללי, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subseteq F^n$ בסיס, $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\} \subseteq F_n[x]$ בסיס, $\{E_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \subseteq F^{m \times n}$ בסיס, כאשר E_{ij} הן המטריצות שיש להן 1 במקום ה-ij ושאר האיברים מתאפסים. הבסיסים האלו נקראים **הבסיסים הסטנדרטיים**.

<u>הערה</u>: לכל מרחב וקטורי יש בסיס.

נשים לב – אם A, B שני בסיסים, מכיוון ש-A בת"ל ו-B פורשת אז $|A| \leq |B|$. מצד שני, בדיוק באותו אופן, B בת"ל ו-A פורשת, ולכן: $|B| \leq |A|$, לפי המשפט האחרון. לכן, $|A| = |B|$. כלומר, בכל הבסיסים של אותו מרחב V יש את אותו מספר איברים.

עובדה זו, מאפשרת לנו להגדיר את מושג המימד.

המימד של מרחב וקטורי V הוא הגודל של בסיס של V, ומסומן: $\dim V$.

בדוגמאות שלנו, אנו רואים ש:

$$\dim F^n = |\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}| = n$$

$$\dim F_n[x] = \left|\left\{1, x, x^2, \ldots, x^n\right\}\right| = n + 1$$

$$\dim F^{m\times n} = |\{E_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}| = mn$$

נשים לב לטענה הבאה (ברורה אחרי מה שכבר הגדרנו ואמרנו) – אם $\dim V = n$, ו-A בת"ל אז: $|A| \leq n$.

אם ב-A יש יותר איברים מהמימד, ב-A יש יותר איברים מבקבוצה פורשת (המימד הוא גודל של בסיס, שהיא גם פורשת) וזו סתירה למשפט הקודם...

באופן דומה, אם $\dim V = n$ ו-B פורשת, אז $n \leq |B|$.

אם ב-B יש פחות איברים מהמימד, ב-B יש פחות איברים מבקבוצה בת"ל (המימד הוא גודל של בסיס, שהיא גם בת"ל) וזו סתירה למשפט הקודם...

למשל, הקבוצה $A=\{(3,2,8),(1,1,4),(2,1,5),(-3,18,9)\}\subseteq\mathbb{R}^3$ בהכרח תלויה ליניארית, מכיוון ש-$|A|=4$ ו-$\dim\mathbb{R}^3=3$.

<u>טענה:</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F ותהי $B\subseteq V$.

א. B בת"ל מקסימלית (כלומר, כל וקטור שנוסיף היא כבר תלויה ליניארית) אם ורק אם B בסיס.

ב. B פורשת מינימלית (כלומר, כל וקטור שנוריד היא כבר לא פורשת) אם ורק אם B בסיס.

ג. אם B פורשת, קיים $S\subseteq B$ בסיס (אינטואיטיבית - אפשר להוריד איברים מ-B עד שתהיה פורשת מינימלית, ולכן בסיס).

ד. אם B בת"ל, קיים $B\subseteq S$ בסיס (אינטואיטיבית - אפשר להוסיף איברים ל-B עד שתהיה בת"ל מקסימלית, ולכן בסיס).