פתרון תרגיל 4 אינפי 1 תיכוניסטים תש"ף

20 בנובמבר 2019

1. נשתמש בכלל הסנדוויץ'.

(א) האיבר הכללי בסדרה הוא $\sqrt[n]{1^n + \ldots + 5780^n}$. מתקיים:

$$5780 = \sqrt[n]{5780^n} \leq \sqrt[n]{1^n + \ldots + 5780^n} \leq \sqrt[n]{5780^n + \ldots + 5780^n} = 5780 \cdot \sqrt[n]{5780}$$

הסדרות מימין ומשמאל שואפות ל־5780 (מצד שמאל קבועה, מצד ימין $\sqrt[n]{5780} \longrightarrow 1$) ולכן גם הסדרה שלנו שואפת ל־5780, לפי סנדוויץ'.

(ב) נשתמש באי־שוויון המשולש:

$$0 \leq \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{k \sin k}{n^3}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{k \sin k}{n^3}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k\,|\sin k|}{n^3} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^3}$$

חוץ מ־$\sin k$ כל הביטויים בוודאות חיוביים, ואנו יודעים ש: $|\sin k| \leq 1$. כעת, נשים לב שהסכום רץ רק במונה, כלומר:

$$= \frac{\sum k}{n^3} = \frac{1 + 2 + \ldots + n}{n^3} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^3} = \frac{n+1}{2n^2}$$

כלומר:

$$0 \leq \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{k \sin k}{n^3}\right| \leq \frac{n+1}{2n^2}$$

$\frac{n+1}{2n^2} \longrightarrow 0$ ולכן $\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{k \sin k}{n^3}\right| \longrightarrow 0$ לפי סנדוויץ', ואם סדרה בערך מוחלט שואפת ל־0 גם בלי הערך המוחלט היא שואפת ל־0:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k \sin k}{n^3} = 0$$

(ג) האיבר שלנו הוא סכום של n^2 מחוברים: $\frac{1}{\sqrt{n+n^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, שהולכים וקטנים. לכן:

$$\frac{1}{\sqrt{n+n^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+n^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$$

באגף שמאל, אנו מחברים n^2 פעמים את אותו המחובר, ולכן:

$$\frac{n}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}} = \frac{n^2}{\sqrt{n+n^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$$

$\frac{n}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}} \longrightarrow \infty$ ולכן, לפי סנדוויץ', גם:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n+k}} = \infty$$

2. הטענה נכונה. $a_n \longrightarrow 1$, ולכן קיים שלב שהחל ממנו: $\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{3}{2}$ (מסתכלים על $\varepsilon = \frac{1}{2}$ בהגדרת הגבול) ולכן: $\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{\frac{3}{2}}$. לפי המשפט, אגף שמאל ואגף ימין שואפים ל־1 ולכן – לפי סנדוויץ' – $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow 1$, כנדרש.