# תרגיל 9

## להגשה עד 1.2.17

יהי $(X,\mathbb{A},\mu)$ ממ"ח.
נסמן: $L^p(\mu)=L^p(X,\mathbb{A},\mu)$. ו: $l^p=l^p(\mathbb{N},\mathbb{P}(\mathbb{N}),\mu)$, באשר $\mu$ הינה מידת הספירה.

**שאלה 1**

תהי: $S:=\{s \mid s\colon X\to\mathbb{R} \text{ is simple (measurable), and } \mu(\{x\mid s(x)\neq 0\})<\infty\}$. הוכיחו כי :

1. $S$ מרחב לינארי מעל $\mathbb{R}$.
2. לכל $p\in[1,\infty)$: $S=\{t \mid t\colon X\to\mathbb{R} \text{ is simple, and } t\in L^p(\mu)\}$.
3. לכל $p\in[1,\infty)$ , $S$ צפופה ב $(L^p(\mu),\|\cdot\|_p)$.

**שאלה 2**

נניח $X$ מרחב טופולוגי, ו־ $\mathbb{B}(X)\subseteq\mathbb{A}$, ולכל $V$ פתוחה לא ריקה מתקיים $\mu(V)>0$.
הוכיחו כי אם $f,g\colon X\to\mathbb{R}$ רציפות כך ש $f=g$ כב"מ־$\mu$ אז $f(x)=g(x)$ לכל $x\in X$,
והסיקו מכך כי לכל $f\colon X\to\mathbb{R}$ רציפה מתקיים:

$$\|f\|_\infty=\sup\{|f(x)|:x\in X\}.$$

**שאלה 3**

1. נניח כי $\mu(X)<\infty$. הוכיחו כי אם $1\le r<p<\infty$ אזי $L^p(\mu)\subseteq L^r(\mu)$ ולכל $f\in L^p(\mu)$ מתקיים:

$$\|f\|_r\le\mu(X)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}\|f\|_p.$$

2. הוכיחו כי אם $r<p$ אזי $l^r\subsetneqq l^p$.

**שאלה 4**

תהי $(f_n)_{\mathbb{N}}$ סדרת פונקציות ממשיות מדידות־$\mathbb{A}$ על $X$ המתכנסת כב"מ לפונקציה $f$.
נניח שעבור $p\in[1,\infty)$ קיימת $g\in L^p(\mu)$ כך שלכל $n$: $|f_n|\le g$ (כב"מ). הוכיחו כי $f,\ f_n\in L^p(\mu)$,
וכן כי $f_n\to f$ ב $(L^p(\mu),\|\cdot\|_p)$.

**שאלה 5**

יהי $\mathcal{H}$מרחב הילברט ו$\mathcal{M}$ תת מרחב לינארי סגור של $\mathcal{H}$. הוכיחו כי: $(\mathcal{M}^\perp)^\perp=\mathcal{M}$.

**שאלה 6**

יהי $\mathcal{H}$ מרחב הילברט עם בסיס בן מניה ותהי $(x_n)_{\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$. נתון כי $\|x_n\| \to \|x\|$ כאשר $n \to \infty$, וכי לכל $y \in \mathcal{H}$ מתקיים: $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ כאשר $n \to \infty$. הוכיחו כי: $\|x_n - x\| \to 0$ כאשר $n \to \infty$.

**בהצלחה :)**