

**בחינת סיום (מועד א') בקורס**  
**מבנים אלגבריים להנדסה (83218)**  
 מרצה: ד"ר נתן קלר

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

נא לענות על 4 מתוך 5 השאלות. בכל שאלה, סעיף א' שווה 15 נקודות וסעיף ב' שווה 10 נקודות.  
 חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון בלבד.

בהצלחה!

שאלה 1

- א. תהי  $(G, \cdot)$  חבורה. הוכיחו כי המרכז  $Z(G)$  הוא תת חבורה נורמלית של  $G$ .  
 ב. תנו דוגמא לחבורה  $(G, \cdot)$  כך ש  $Z(G)$  הוא לא כל החבורה ולא רק איבר היחידה.

שאלה 2

- תהא  $(G, \cdot)$  חבורה ויהיו  $a, b \in G$ . הוכיחו או הפריכו:  
 א. אם  $a, b$  מתחלפים אז  $o(ab) = o(a)o(b)$ .  
 ב. גם אם  $a, b$  לא מתחלפים,  $o(ab) = o(ba)$ .

שאלה 3

- א. תהיינה  $G_1, G_2$  חבורות סופיות מסדרים זרים, כלומר  $\gcd(|G_1|, |G_2|) = 1$ . הוכיחו כי קיים הומומורפיזם אחד בלבד  $f: G_1 \rightarrow G_2$ .  
 ב. יהי  $p$  מספר ראשוני,  $n$  מספר טבעי, ותהי  $G$  חבורה עם  $p^n$  איברים. הוכיחו כי קיימת תת חבורה  $H$  של  $G$  שהיא איזומורפית לחבורה  $(\mathbb{Z}_p, +)$ .

שאלה 4

- א. יהיו  $a, p$  מספרים טבעיים זרים. הוכיחו כי קיים  $c$  טבעי כך ש-  $a \cdot c = 1 \pmod{p}$ .  
 ב. מצאו את כל פתרונות המשוואה  $18x = 24 \pmod{120}$ .

שאלה 5

- א. מצאו שדה  $F$  שהשדה  $(\mathbb{Z}_3, +)$  הוא תת שדה שלו, וכן יש בו פתרון למשוואה  $x^2 + 1 = 0$ .  
 ב. האם קיים שדה עם 4 איברים שיש בו פתרון למשוואה  $x^3 + x^2 + 1 = 0$ ?

בהצלחה!