נכתב על ידי נועם יערי

משפט - כלל השרשרת

$$\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right) \cdot \overbrace{g'(x)}^{\text{הנגזרת הפנימית}}$$

הוכחה

$$\left(f\left(g(x)\right)\right)' \coloneqq \lim_{h\to 0} \frac{f\left(g(x+h) - f\left(g(x)\right)\right)}{h}$$

$$\frac{f\left(g(x+h)\right) - f\left(g(x)\right)}{h} = \overbrace{\frac{f\left(g(x+h) - f\left(g(x)\right)\right)}{g(x+h) - g(x)}}^{\overset{h\to 0}{\to} 0}{}_{\to f'(g(x))} \cdot \overbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}^{\overset{h\to 0}{\to} g'(x)}$$

בעיה בהוכחה:

ייתכן $g(x+h) - g(x) = 0$.

נתקן את ההוכחה:

נגדיר:

$$D(h) = \begin{cases} \dfrac{f\left(g(x+h)\right) - f\left(g(x)\right)}{g(x+h) - g(x)}, & g(x+h) \neq g(x) \\ f'\left(g(x)\right), & g(x+h) = g(x) \end{cases}$$

$$\frac{f\left(g(x+h)\right) - f\left(g(x)\right)}{h} = D(h) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

(בדוק, לפי שני המקרים).

נשאר להוכיח $D(h) \to f'\left(g(x)\right)$

נעבוד בלשון הסדרות.

תהי $h_n \to 0$. הסדרה מתחלקת לשתי תתי סדרות:

1. האיברים h_n כך ש - $g(x+h_n) = g(x)$. **2.** האיברים h_n כך ש - $g(x+h_n) = g(x)$.

אם אחת מהן סופית, היא לא משפיעה על הגבול ואפשר להניח שאנו תמיד באותו מקרה. במקרה 2, $D(h_n) = \underbrace{f'\left(g(x)\right)}_{\to f'(g(x))}$ כסדרה קבועה. במקרה 1, מהלמה על גבול של הרכבת פונקציות (תנאיה מתקיימים כאן כי $g(x+h_n) \neq g(x)$ תמיד), $D(h_n) = (f\left(g(x+h_n)\right) - \frac{f\left(g(x)\right)}{g(x+h_n) - g(x)}$.

$g(x) \neq g(x+h_n) \to g(x)$.

$$D(h_n) = (f\left(g(x+h_n)\right) - \frac{f\left(g(x)\right)}{g(x+h_n) - g(x)} \to \lim_{a\to g(x)} (f(a) - \frac{f\left(g(x)\right)}{a - g(x)}$$

אם שתי הסדרות אינסופיות, מאותה סיבה $f'\left(g(x)\right) \to$ (כל אחת מתתי הסדרות) D.

כיוון שיחד הסדרות מכסות את כל הסדרה h_n, $D(h_n) \to f'\left(g(x)\right)$.

(**תרגיל:** הוכח $D(h) \to f'\left(g(x)\right)$ בעזרת שימוש ב - δ, ϵ)

נכתב על ידי נועם יערי

דוגמה

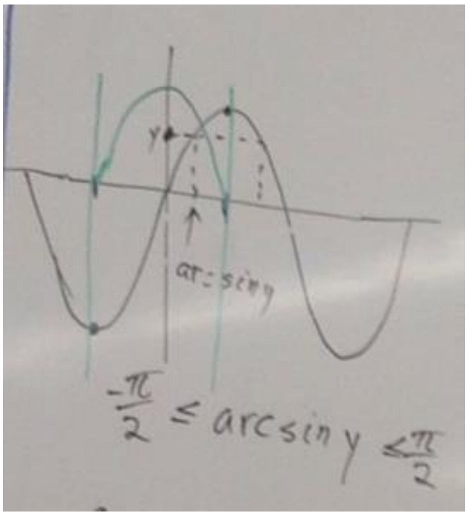
$$(\boldsymbol{\cos x})' = \left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)' = \left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)'\left(x+\frac{\pi}{2}\right)' = \cos(x+\frac{\pi}{2})\cdot 1 = -\boldsymbol{\sin x}$$

$$(\boldsymbol{\tan x})' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x-(-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\cos^2 x}}$$

בדומה, $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$$(\boldsymbol{x^{\alpha}})' = \left(e^{\log(x^{\alpha})}\right)' = \left(e^{\alpha\cdot\log x}\right)' \overset{\text{שרשרת}}{\triangleq} e^{\alpha\cdot\log x}\cdot(a\cdot\log x)' = x^{\alpha}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x} = \boldsymbol{\alpha x^{\alpha-1}}$$

לכל α. כאן $x>0$.



$$(\boldsymbol{\arcsin x})' \overset{\left(f^{-1}(y)\right)'=\frac{1}{f'(x)}}{\triangleq} \frac{1}{\sin(y)'}$$

$$= \frac{1}{\cos y} \overset{-\frac{\pi}{2}\le y:=\arcsin x\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos y\ge 0\ \cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}}{\triangleq} \frac{1}{\sqrt{1-\underbrace{\sin^2 y}_{=x^2}}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{x^2}}}$$

בדומה,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$(arcctan\ x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

(תרגיל – הוכח!)

בכל הדוגמאות הנזכרות למעלה, אם נכתוב $u(x)$ במקום x, נקבל אותה תוצאה, כפול $u'(x)$, לפי כלל השרשרת. למשל:

$$(u(x)^{\alpha})' = \alpha u(x)^{\alpha-1} \cdot u'(x)$$

הגדרה

נגזרת מסדר n מוגדרת באינדוקציה: $f^{(1)}(x) \coloneqq f'(x)$, $f^{(n+1)}(x) \coloneqq \left(f^{(n)}(x)\right)'$.

דוגמה

$$f(x) = \sin x$$
$$f^{(1)}(x) = f'(x) = \cos x$$
$$\Rightarrow f^{(2)}(x) = f''(x) = -\sin x$$
$$\Rightarrow f^{(3)}(x) = -\cos x$$
$$\Rightarrow f^{(4)}(x) = -(-\sin x) = \sin x$$
$$\Rightarrow \sin^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x \,, n = 1 (mod\ 4) \\ -\sin x \,, n = 2 (mod\ 4) \\ -\cos x \,, n = 3 (mod\ 4) \\ \sin x \,, n = 0 (mod\ 4) \end{cases}$$

נכתב על ידי נועם יערי

משפטים יסודיים לגבי נגזרות

הגדרה

נקודת מקסימום של f בתחום A: נקודה $c \in A$ כך ש - $f(c) = \max\{f(a): a \in A\}$.

נקודת מינימום של f בתחום A: נקודה $c \in A$ כך ש - $f(c) = \min\{f(a): a \in A\}$.

נקודת אקסטרמום של f בתחום A: נקודת מינימום או מקסימום.

משפט פרמה

תהי c נקודת אקסטרמום של f בקטע פתוח. אם $f'(c)$ קיימת, אז $f'(c) = 0$.

הוכחה

הוכחה עבור נקודת מקסימום:

$f'(c)$ קיימת, ולכן שווה לנגזרות מימין ומשמאל שם.

$$f'(c) = f'_+(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\overbrace{f(c+h) - f(c)}^{\leq 0}}{h_{\geq 0}} \leq 0$$

(כי c נקודת מקסימום)

$$f'(c) = f'_-(c) = \lim_{h \to 0^-} \frac{\overbrace{f(c+h) - f(c)}^{\leq 0}}{h_{\leq 0}} \geq 0$$

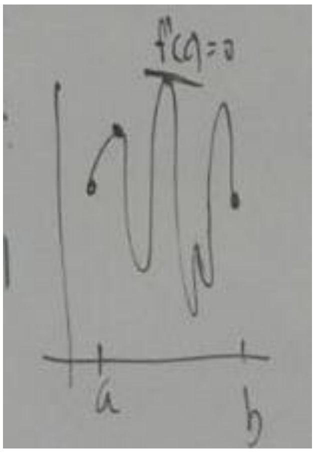
הערה

המשפט אינו נכון עבור קטע סגור: $f(x) = x$ ב - $[0,1]$.

$f'(x) = 1$ תמיד, אך $0,1$ נקודות אקסטרמום ב - $[0,1]$.

משפט רול

תהי f רציפה ב -$[a,b]$ וגזירה ב - (a,b). אם $f(a) = f(b)$, אז יש $a < c < b$ כך ש – $f'(c) = 0$.



הוכחה

f רציפה בקטע סגור, לכן יש לה מקסימום ומינימום שם. אם $\min f = \max f$ אז f קבועה, ואז $f(c) = 0$ לכל $a < c < b$.

נותר לטפל במקרה $\min f \neq \max f$. כיוון ש - $f(a) = f(b)$ לא ייתכן שנקודת המקסימום ונקודת המינימום של f בקטע שתיהן a או b (אילו שתיהן הן a או b אז $f(a) = f(b)$ היה שווה בסתירה).

תהי אפוא $a < c < b$ נקודת אקסטרמום. מהמשפט הקודם, $f'(c) = 0$

■

הערה

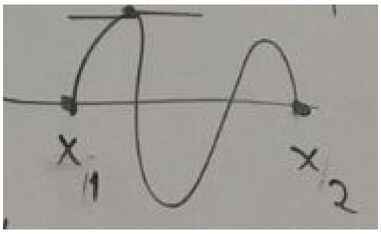
במשפט זה, מספיק להניח שהגבולות $\lim_{x\to a^-} f(x)$, $\lim_{x\to a^+} f(x)$ קיימים ושווים ואז מספיק ש $f-$ גזירה בקטע (a, b) וגם הנ״ל מתקיים. אילו f המקורית לא הייתה רציפה בקצוות, זו הייתה אי רציפות סליקה.

דוגמה

למשוואה $x^3 + a_{>0}x + b$ יש בדיוק שורש ממשי אחד.

הוכחה

הפולינום ממעלה אי זוגית לכן יש לו שורש. נניח שיש לו עוד שורש.



מרול בקטע $[\overbrace{x_1, x_2}^{\text{השורשים}}]$

יש $x_1 < c < x_2$ כך ש - $f'(c) = 0$. $f'(x) = 3 \cdot x^2 + a_{>0} > 0$ בסתירה לכך שיש עוד שורש.